Ilie Ivanov

Probleme rezolvate de *fizică clasică*

- nivel universitar -

III-13.659

TRIX
ROM
BUCUREŞTI

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBLIOTECA CENTR. UNIV.
"M. EMINESCU" IAŞI
FIZICĂ
III-13.659

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ILIE IVANOV

Probleme rezolvate

de

FIZICĂ CLASICĂ

- nivel universitar -

- TERMODINAMICĂ
- FIZICĂ STATISTICĂ
- ELECTRICITATE ŞI ELECTROMAGNETISM
- OPTICĂ ELECTROMAGNETICĂ
- RELATIVITATE RESTRÂNSĂ

0 000008 33867 BCU IAŞI

MATRIX ROM
BUCUREŞTI 2002

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

© MATRIX ROM
C.P. 16 - 162
77500 - BUCUREŞTI
tel. 01.4113617, fax 01.4114280
e-mail: matrix@fx.ro

REFERENŢI ŞTIINŢIFICI:

Prof. univ. dr. fiz. ELEONORA RODICA BENA
Conf. dr. ing. CONSTANTIN ROŞU

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
IVANOV, ILIE
Probleme rezolvate de fizică clasică - nivel universitar/ Ilie Ivanov - Bucureşti, Matrix Rom, 2002
228 pagini, 25 cm
Bibliogr.
ISBN 973-685-442-6

53

Lucrarea a fost analizată de cadre didactice competente şi cu o bogată experienţ predare din Departamentul de Fizică al Universităţii POLITEHNICA din Bucur apoi a fost prezentată şi discutată în şedinţa ***Colectivului cadrelor didactice*** ca avizat-o ***favorabil*** şi a recomandat-o ***pentru a fi publicată***.

ISBN 973 - 685 - 442 - 6

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Memoriei părinților mei ***Cortesa*** *și* ***Niculae***
cărora niciodată nu le-am putut oferi ceva
pe măsura sacrificiilor lor !

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PREFAȚĂ

Lucrarea " Probleme rezolvate de fizică clasică – *nivel universitar* - " s-a impus ca o necesitate în procesul de aprofundare a cunoştinţelor de fizică şi constituie un sprijin deosebit de preţios destinat studenţilor pentru a le asigura o pregătire fundamentală temeinică prin conturarea unor orizonturi aplicative vizând viitoarea profesie.

Cartea se compune din două părţi: ***Partea întâi*** prezintă probleme dintre cele mai reprezentative care aplică rezultatele consideraţiilor teoretice expuse în volumul I al lucrării *"Capitole fundamentale ale fizicii clasice – Bazele teoretice –"* [11] acoperind în bună măsură problematica abordată acolo, în timp ce problemele prezentate în ***partea a doua*** presupun consultarea prealabilă a volumului II intitulat *"Extinderi teoretice şi aplicaţii"* [12]. Prezentarea materialului în această structură este compatibilă cu orientările opţionale ale studenţilor care fie se pot mărgini la o pregătire fundamentală limitată la însuşirea bazelor fizicii sau pot opta pentru o analiză mai profundă a problematicii fizicii aplicate prin consultarea volumului II şi a *părţii a doua* a acestei culegeri de probleme.

În această a 2-a variantă, studentul se confruntă cu problematica deschisă de unele aplicaţii tehnologice ale fizicii şi se informează asupra unor tehnici experimentale de investigare a fenomenelor fizice. Considerăm deosebit de utilă pentru un viitor specialist însuşirea fizicii prin consultarea acestui bogat material de informare care se adresează deopotrivă atât studenţilor politehnişti sau universitari – cât şi candidaţilor la masterat.

De asemenea considerăm deosebit de preţioase sugestiile şi observaţiile ce vor rezulta în urma consultării materialului care – fiind la prima ediţie – este expus criticilor şi comentariilor menite să asigure îmbunătăţirea unei ediţii viitoare.

Mulţumesc tuturor autorilor referinţelor bibliografice al căror efort anterior a stat la baza scrierii acestei cărţi, precum şi acelora care prin observaţii şi sugestii competente vor contribui la îmbunătăţirea calităţii materialului prezentat. Mulţumiri cu totul speciale adresez ***referenţilor ştiinţifici*** pentru răbdarea, exigenţa şi solicitudinea dovedite pe durata consultării materialului, ***colegilor de Catedră*** care au manifestat interes în consultarea lucrării exprimând totodată opiniile lor critice iar în numele studenţilor- principalii beneficiari ai acestei lucrări- adresez mulţumiri conducerii întreprinderii **GRIRO S.A - *Bucureşti*** reprezentată prin Domnii ***GEORGE ALEXE*** *director de Vânzări şi Marketing* şi *director Economic* ***MIHAI MANOLACHE*** care au sponsorizat apariţia cărţii cu unele materiale consumabile. Pe toţi îi asigur de profunda mea recunoştinţă şi le rămân îndatorat.

Ilie Ivanov
- Doctor în fizică -
UNIVERSITATEA POLITEHNICĂ
BUCUREŞTI
Departamentul de Fizică

BCU IASI UNIVERSITY LIBRARY

CUPRINS

Pagina

PARTEA ÎNTÂI

PROBLEME ,EXERCIȚII ȘI ÎNTREBĂRI DIN FIZICA CLASICĂ

I - ENUNȚURI 1

I.1. Analiză dimensională 1
I.2. Termodinamică 4
I.3. Fizică statistică 11
I.4. Electricitate 15
I.5. Electromagnetism 26
I.6. Relativitate restrânsă 39

II - SOLUȚII , INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 42

II.1. Analiză dimensională 42
II.2. Termodinamică 45
II.3. Fizică statistică 68
II.4. Electricitate 84
II.5. Electromagnetism 124
II.6. Relativitate restrânsă 163

PARTEA A DOUA

PROBLEME DIVERSE
APLICAȚII
ALE UNOR EXTINDERI TEORETICE

I - ENUNȚURI 171

II - SOLUȚII , INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 183

BIBLIOGRAFIE

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PARTEA ÎNTÂI

PROBLEME, EXERCIȚII ȘI ÎNTREBĂRI DIN FIZICA CLASICĂ

I - ENUNȚURI

I.1 ANALIZĂ DIMENSIONALĂ

1. Să se indice mărimile fizice care se exprimă în unitățile de măsură:

a) N·m
b) N/m^2
c) j/grad
d) j/kg·grad

2. Să se scrie formulele dimensionale pentru următoarele mărimi fizice:

a) viteza, accelerația ;
b) forța ;
c) lucrul mecanic, energia mecanică, momentul forței ;
d) puterea mecanică ;
e) constanta atracției universale ;
f) presiunea, modulul de elasticitate ;
g) densitatea masică.

3. Să se scrie formulele dimensionale pentru următoarele mărimi fizice:

a) căldura, Q ;
b) căldura specifică, c;
c) constanta Boltzmann, k ;
d) constanta universală a gazelor perfecte, R.

4. Să se scrie formulele dimensionale pentru următoarele mărimi fizice:

a) sarcina electrică, q ;
b) permitivitatea electrică absolută, ε ;
c) intensitatea câmpului electrostatic, E ;
d) potențialul câmpului electrostatic, φ ;
e) capacitatea electrică, C ;
f) rezistența electrică, R ;
g) inducția câmpului magnetic, B ;
h) intensitatea câmpului magnetic, H ;
i) fluxul câmpului magnetic, ϕ ;
j) inductanța unei bobine, L ;
k) permeabilitatea magnetică absolută, μ.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5. Să se stabilească cu ajutorul analizei dimensionale dependența forței centrifuge F de masa m a corpului aflat în mișcare uniformă, de viteza unghiulară ω și de raza R a traiectoriei.

6. Un corp de masă m se deplasează sub acțiunea unei forțe constante F, paralel cu direcția forței aplicate pe o distanță l. Să se stabilească dimensional cum depinde viteza v atinsă de corp de mărimile F, m și l.

7. Știind că frecvența de vibrație transversală ν_t a unei corzi cu secțiunea transversală mică depinde de lungimea l a corzii, de densitatea ρ și de modulul de elasticitate E să se stabilească dimensional dependența $\nu_t=\nu_t(E,l,\rho)$.

8. Să se precizeze expresiile dimensionale ale constantei k a unui oscilator elastic și accelerației gravitaționale g, apoi să se stabilească dimensional dependențele $T=T(m,k)$ și $T=T(l,g)$ pentru perioada T a pendulului elastic, respectiv a pendulului gravitațional.

9. Să se stabilească dimensional dependența rezistenței R opuse de un fluid la înaintarea unui corp în funcție de viteza v a corpului, de densitatea ρ a fluidului și de aria S a secțiunii transversale.

10. Să se stabilească dimensiunea și unitatea de măsură pentru constanta R a gazelor perfecte.

11. Să se scrie formula dimensională a constantei atracției universale γ care intervine în formula forței de interacție $F=\gamma\cdot(m_1m_2/r^2)$ între două puncte materiale cu masele m_1 și m_2, aflate la distanța r între ele.

12. O particulă de masă m încărcată cu sarcina electrică q pătrunde cu viteza v într-un câmp magnetic de inducție B ($v\perp B$). Să se stabilească dimensional dependența $r=r(v,m,g,B)$ a razei traiectoriei particulei.

13. Să se deducă expresia energiei câmpului magnetic înmagazinată într-o bobină, știind că această energie depinde de inductanța L a bobinei și de intensitatea curentului electric I prin bobină.

14. Știind că viteza de propagare a undelor longitudinale într-o bară solidă depinde de modulul de elasticitate E al barei și de densitatea masică a acesteia ρ, să se deducă pe baza analizei dimensionale, expresia vitezei v în funcție de E și ρ.

15. Să se deducă expresia vitezei luminii în vid, în funcție de permitivitatea vidului ε_0 și permeabilitatea magnetică μ_0 a vidului.

16. Știind că energia înmagazinată într-un condensator depinde de sarcina electrică q de pe o armătură a condensatorului și de capacitatea C a condensatorului, să se deducă pe baza analizei dimensionale, expresia energiei condensatorului în funcție de q și C.

17. Energia unității de volum a unui câmp electric în vid depinde de permitivitatea vidului ε_0 și de intensitatea E a câmpului electric. Să se stabilească dependența densității de energie w de ε_0 și E.

18. Se măsoară densitatea mercurului cu ajutorul unui sistem de două vase comunicante. În ramura 1 se află apă cu înălțimea coloanei $h_1=68mm$, iar în ramura 2 mercur cu înălțimea

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

$h_2=5mm$. Eroarea absolută a măsurătorilor înălțimilor este $\Delta h=1mm$. Știind că densitatea apei este $\rho_1=10^3 kg/m^3$, cu o eroare neglijabilă, să se calculeze eroarea absolută $\Delta\rho_2$ și eroarea relativă $\delta\rho_2$ pentru densitatea ρ_2 a mercurului.

19. Viteza unui electron accelerat la o diferență de potențial U este dată de formula $v=(2eU/m)^{1/2}$. Să se calculeze eroarea absolută și eroarea relativă ale vitezei v obținute, dacă $U=500V$, iar eroarea absolută cu care se determină diferența de potențial este $\Delta U=2V$.

20. Rezistențele a doi rezistori sunt: $R_1=(150\pm3)\Omega$. Să se calculeze erorile absolute și relative când: a)Rezistorii sunt conectați în serie; b) Rezistorii sunt conectați în paralel.

21. Valoarea experimentală a vitezei lumini în vid este $c=(2,99796\pm0,00004)\cdot10^8 m/s$, iar viteza sunetului în aer, la 0^oC, este $v=(331,63\pm0,04)m/s$. Să se scrie erorile absolute ce afectează valorile acestor viteze și să se stabilească care dintre aceste două valori este mai precis cunoscută.

22. Eroarea absolută care se comite cu ajutorul unui micrometru este $\Delta d=0,01mm$. Efectuându-se trei măsurări se obțin rezultatele: $d_1=1mm$, $d_2=5mm$, $d_3=10mm$. Să se calculeze erorile relative procentuale și preciziile acestor măsurări.

23. Se măsoară capacitatea calorică C a unui calorimetru și accesoriilor prin metode ameste - cului. În calorimetru de află apă de masă M la temperatura t_0. După introducerea unei cantități de apă cu masa m la temperatura t_1 ($t_1>t_2$), în calorimetru se stabilește temperatura t. Se cer expresiile pentru: a) capacitatea calorică C; b) eroarea relativă δC; c) eroarea absolută ΔC.

24. Coeficientul de dilatare termică liniară se determină din formula $\alpha=(l-l_0)/l_0(t-t_0)$, unde l_0 și l sunt lungimile barei la temperatura t_0, respectiv t. Să se calculeze eroarea absolută și eroarea relativă care afectează rezultatul obținut pentru coeficientul α, dacă lungimile l și l_0 se determină cu aceeași eroare absolută Δl, iar temperaturile t_0 și t au aceeași eroare absolută Δt.

25. Energia eliberată de arderea unui kilogram de H_2 este de $1,41\cdot10^8 J$. În fizica clasică, masa apei rezultate în urma arderii H_2 este egală cu suma maselor reactanților. Teoria relativității prezice totuși o diminuare a masei totale în procesul de ardere, echivalentă cu energia eliberată ($\Delta E=\Delta Mc^2$). Ce precizie trebuie să aibă un cântar, pentru a pune în evidență o aseme - nea diferență de masă?

26. În urma efectuării unui set de 10 măsurări pentru o mărime fizică X au fost obținute valorile: $x_1=35,6$, $x_2=35,6$, $x_3=36,1$, $x_4=36,2$, $x_5=36,1$, $x_6=35,9$, $x_7=36,2$, $x_8=36,1$, $x_9=35,9$, $x_{10}=36,6$. Cum se indică rezultatul acestor măsurări?

27. Potrivit legii Stefan-Boltzmann, energia radiației termice emisă la temperatura T de o su - prafață de arie unitate în unitatea de timp este : $R=\sigma T^4$, unde constanta universală $\sigma=5,6696\cdot10^{-8} J/m^2kg^4s$. Energia emisă de o suprafață de arie S va fi $R=\sigma ST^4$.
Măsurările efectuate pentru S și T conduc la valorile

$$S=(24,844\pm0,0014)\cdot10^{-4} m^2 \text{ și } T=(502,47\pm0,22)K.$$

Să se precizeze energia radiată de placă în unitatea de timp.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.2 TERMODINAMICĂ

*1.Să se arate că în cazul unei **forme Pfaff** de trei variabile*

$$dF = X(x,y,z)dX + Y(x,y,z)dY + Z(x,y,z)dZ$$

*condiția ca aceasta să fie **diferențială totală exactă** poate fi scrisă într-una dintre formele echivalente:*

a) $\nabla \times \vec{R} = 0$ *unde* $\vec{R} = \vec{R}(X,Y,Z)$ *sau*

b) $\oint dF = 0$

2.

a) Să se demonstreze că dacă ***forma*** de două variabile $df = X(x,y)dX + Y(X,Y)dY$ este o diferențială totală exactă, atunci are loc egalitatea:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_y$$

b) Presupunând că funcțiile X și Y sunt *injective, continue și derivabile*, iar $Y \neq 0$ să se arate că forma df posedă totdeuna ***factor integrant***, adică *o formă diferențială de două variabile este totdeauna obonomă.*

3. Să se identifice între formele diferențiale de mai jos diferențialele totale exacte și să se specifice funcțiile care le generează

$$df_1 = xdY + ydX \qquad df_4 = xdY - ydX$$

$$df_2 = xydX + zydY \qquad df_5 = x^2 ydY + y^2 XdX$$

$$df_3 = (x+y)dY + (x-y)dX \qquad df_6 = (x+y)dX + (x-y)dY$$

4. Legea tranzitivității echilibrului termic afirmă că două corpuri în echilibru termic cu al treilea sunt în echilibru între ele. Să se arate că această proprietate presupune existența unei funcții de stare numită ***temperatură empirică***, $\theta = f_c(p,V)$ astfel că echilibrul termic a două sisteme implică egalitatea temperaturilor empirice.

5. Considerând gazul perfect drept corp termometric, se definește o scară de temperatură luându-se pentru temperatura punctului critic al apei $\theta_0 = 682{,}9^{\circ}C$.Ce temperatură în grade Celsius corespunde temperaturii $\theta' = 485{,}376$ măsurată în noua scară ?

6. Se definesc următorii coeficienți:

*-**coeficientul volumic de dilatare termică*** $\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$;

*-**coeficientul de elasticitate*** numit și ***coeficient termic al presiunii*** $K_\gamma = \frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ și,

*-**coeficientul de comprimare izotermă*** $\beta = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$

Să se stabilească legătura între coeficienții α, β și K_γ.

7.Să se deducă coeficienții α, β și K_γ definiți în problema anterioară, pentru gazul ideal și pen-

BCU IAȘI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

tru cel real ce satisface ecuația Van der Waals.

8. Să se arate că unicitatea distribuției energiei unui sistem în echilibru asupra părților sale și creșterea simultană a energiei acestor părți atunci când crește energia totală a sistemului, permit să se aleagă pentru energia internă o funcție monoton crescătoare de temperatură.

9. Să se stabilească ecuația de stare a unei substanțe pentru care se cunosc coeficienții termodinamici :

$$K_\gamma = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = f(T) \text{ și } \beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p}.$$

10. Să se stabilească ecuația de stare a unei substanțe pentru care ceficientul α de dilatare termică în volum și coeficientul de compresibilitate izoterm β se exprimă prin relațiile

$$\alpha = \frac{V-a}{VT} \quad \text{și} \quad \beta = \frac{3(V-a)}{4pV} \qquad (a=const.)$$

11. Se dau : $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\nu R}{V-b}$; și $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{\nu RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$. Să se calculeze $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$ și $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$

apoi să se stabilească ecuația de stare corespunzătoare.

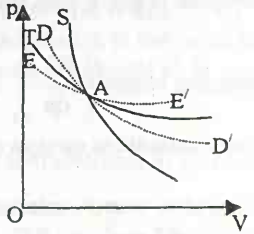
12. Să se stabilească ecuația proceselor cuasistatice adiabatice pentru gazul ideal.

13. Pornind de la ecuațiile (2.48) - (2.51) particularizate pentru cazul unui sistem termodinamic simplu (caracterizat de un singur parametru extern *a* și o singură forță generalizată *A*), să se stabilească :

a) ecuația politropei pentru acest sistem ;
b) ecuația adiabatei.

14. Să se stabilească în ce condiții adiabata ($dQ = 0$) coincide cu izoterma ($dT=0$).

15. Pe diagrama (p,V) din figură s-au trasat printr-un punct oarecareA izoterma T și adiabata S ale unui gaz ideal. Să se arate că orice proces politrop, reprezentat pe această diagramă de curba DAD′,decurge la capacitate calorică negativă,iar procesul reprezentat de curba EAE′, la capacitate calorică pozitivă.



16. Într-un cilindru cu piston se găsesc V_1 litri de apă la temperatura T_0. Cunoscând pentru apă coeficientul α de dilatare termică și coeficientul β de comprimare izotermă, să se calculeze lucrul mecanic efectuat într-o comprimare izotermă în care presiunea crește de la, p_0 la p_1, urmată de o încălzire izobară în care temperatura crește de la T_0 la T_1.

17. Să se compare creșterea temperaturii gazului ideal monoatomic cu aceea a gazului ideal biatomic într-o comprimare adiabatică.

18. Căldura molară la presiunea de *1 atm.*, în intervalul de temperatură (*273-1500 K*), variază cu temperatura după legea empirică : $C_p = a + bT + cT^2$ .Se definește căldura molară medie $\overline{C}$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

prin relația: $\overline{C} = \frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} C dT$ în care $C=C(T)$. Să se determine căldura molară medie $\overline{C}_p$ și variația entalpiei dacă temperatura crește de la T_1 la T_2.

19. Într-un vas izolat termic se realizează un vid înaintat. Vasul este în contact termic cu atmosfera care se află în condiții normale la presiunea p_0 și temperatura T_0. La un moment dat robinetul de evacuare se deschide și vasul se umple cu aer. Precizați temperatura gazului din interiorul vasului după umplerea acestuia.

20. Precizați valoarea temperaturii finale a unui mol de gaz care se destinde adiabatic în vid de la volumul V_1 la V_2 considerând că :

a) gazul este ideal și energia internă are valoarea $U = \frac{3RT}{2}$

b) gazul este real, iar energia sa internă se exprimă prin $U = \frac{3RT}{2} - \frac{a}{V}$; $a=const.$

21. În cazul unui proces Joule-Thomson, gazul care inițial ocupă un volum V_1 la presiunea p_1 trece printr-un perete poros într-un compartiment de volum V_2 ce conține același gaz la presiunea $p_2<p_1$. Arătați că în acest proces, entalpia se conservă.

22. Un gaz perfect suferă un proces cuasistatic reversibil caracterizat de relația $p = p_0 - a \cdot V$ în care p_0 și a sunt constante. Să se stabilească dependența dintre presiune și temperatură.

23. Cunoscând că diferența de presiune între două straturi de aer în atmosferă este $dp = -\rho g dh$ în care ρ este densitatea aerului iar $g=9,81 m/s^2$ accelerația gravitațională și admițând că procesul de scădere a presiunii este adiabatic,să se calculeze variația temperaturii cu înălțimea în Kelvini pe Km. Se consideră masa moleculară medie a componenților aerului $\mu=28,8$; $\gamma = 7,5$ și $R=8,31 \cdot 10^3 J\, kmol^{-1} K^{-1}$.

24. Să se arate că adiabatele nu se pot intersecta și că o izotermă nu poate intersecta de două ori o adiabată.

25. Calculați diferența $C_\sigma - C_\varepsilon$ între capacitățile calorice la *solicitare constantă* și la *deformare constantă* pentru o bară solidă elastică.

26. Deduceți relația $\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -V_0 T\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p$ între variația cu presiunea a capacității calorice la presiune constantă și variația cu temperatura a coeficientului α de dilatare termică în volum.

27. Să se scrie ecuația calorică de stare satisfăcută de un gaz a cărui ecuație termică de stare este $pV = \nu RT \exp[-a/RTV]$.

28. Să se arate că volumul $V=V(T,p)$ al unui gaz este funcție caracteristică. Scrieți expresia entropiei în funcție de volum.

29. Să se calculeze schimbul de căldură cu exteriorul pe care îl realizează gazul ideal în transformările *izobară, izocoră, izotermă, adiabatică* și *politropă*. Se va considera starea inițială definită de parametrii (p_1, V_1, T_1) și starea finală definită de (p_2, V_2, T_2).

30. Să se calculeze căldurile molare în cazul transformărilor unui gaz perfect, ale căror legi în variabilele p,V au formele: *1.* $p=aV(a=const.)$; *2.* $p=bV^2(b=const.)$; *3.* $p=cV^5(c=const.)$; *4.* $pV^2=const.$

31. Să se stabilească expresia energiei interne pentru gazul ideal şi pentru gazul real, apoi să se exprime variaţia energiei interne în transformările izobară, izocoră, izotermă, adiabatică şi politropă.

32. Să se scrie expresiile principiului întâi al termodinamicii şi entalpiei diferenţiale pentru un sistem termodinamic cu masa M ce se mişcă uniform cu viteza v în raport cu un referenţial inerţial.

33. Să se stabilească expresia lucrului mecanic efectuat de un gaz ideal în cursul unei transformări adiabatice.

34. Un gaz ideal se găseşte iniţial în starea descrisă de parametrii: $T_1=300K$, $V_1=4m^3$. Gazul se destinde izoterm până la $V=16m^3$. În continuare, are loc un proces izocor, urmat de o comprimare adiabatică, ce aduce gazul în starea iniţială. Ştiind că $\gamma=1,4$:
1. Să se figureze ciclul în diagramele (p,V) şi (T,S) precizând valorile parametrilor de stare în stările finale ale celor trei procese ;
2. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de gaz în timpul ciclului.

35. Un fir metalic având lungimea l, modulul lui Young E şi aria secţiunii transversale A se află la 0^0C sub acţiunea unei forţe F ce acţionează în lungul firului într-un proces cuasistatic şi izoterm. Să se scrie expresia lucrului mecanic efectuat prin creşterea forţei de la 0 la F_1.

36. Într-un cilindru cu piston se află $5l$ de apă la $293K$. Cunoscând coeficientul de dilatare în volum $\alpha=2\cdot10^{-4}K^{-1}$ şi cel de compresibilitate $\beta=4\cdot10^{-10}m^2/N$ să se calculeze lucrul mecanic efectuat în următoarele procese cuasistatice:
a) izoterm, cu creşterea presiunii de la *1atm.* la *100 atm.*
b) izobar, la presiunea de *1 atm.* şi la o creştere a temperaturii între 0^0 şi 80^0C.

37. Să se arate că, în general, căldura elementară dQ nu este diferenţială totală exactă.

38. Un mol de gaz ideal la temperatura T are energia internă exprimată prin relaţia: $U=U_0+C_1\cdot T$. Să se determine temperatura finală a gazului după o destindere adiabatică în vid, apoi să se exprime variaţia energiei interne a unui gaz ideal ce se dilată izobar de la volumul V_1 la volumul V_2.

39. Precizaţi în ce condiţii căldura preluată de la o sursă de căldură se transformă în lucru mecanic ?

40. Să se scrie ecuaţia fundamentală a termodinamicii pentru un strat elementar infinitesimal dm situat la înălţimea h într-o coloană de fluid cu masa m şi densitatea masică ρ.

41. Se consideră un sistem care trece reversibil din starea 1 în starea 2, absorbind de la un termostat căldura dQ şi efectuând lucrul mecanic dL. Din starea 2 în starea 1 sistemul se întoarce ireversibil primind de la termostat căldura dQ_{nest} şi efectuând lucrul mecanic dL_{nest}. Să se arate că în acest caz, lucrul mecanic al sistemului la trecerea nestatică este totdeauna mai mic decât lucrul mecanic efectuat de sistem la trecere cuasistatică. Ca urmare, se observă

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

că în cazul proceselor nestatice este posibil un proces închis în care lucrul mecanic este diferit de zero chiar cu un singur termostat.

42. Precizați sensul variației temperaturii apei la o comprimare adiabatică în plaja $0^0 - 4^0$ C știind că în acest interval de temperaturi,coeficientul de dilatare cubică α al apei este negativ.

43. Arătați că temperatura de $4^0 C$ este inaccesibilă pentru apă la o răcire sau o încălzire a apei printr-o destindere adiabatică.

44. Presupunând că C_V nu depinde de temperatură, deduceți expresia adiabatei unui gaz Van der Waals a cărei ecuație termică se exprimă prin relația $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$.

45. Stabiliți ecuațiile de trecere de la diagramele (p,V), (p,T) și (V,T) la diagrama (T,S) pentru transformările particulare ale gazului ideal (izobară, izotermă, izocoră, adiabată).

46. Să se particularizeze ecuația $S - S_0 = \frac{R}{\gamma - 1} ln\left(\frac{pV^\gamma}{p_0 V_0^\gamma}\right)$ pentru procese izobare, izocore, izoterme și adiabate, apoi să se figureze curbele ce descriu aceste procese într-o diagramă (T,S).

47. Să se scrie ecuația adiabatei unui gaz pentru care ecuația de stare se scrie sub forma

$$p = p_0(1 + mT - nV)$$

în care m și n sunt constante. Se consideră că C_V este constantă pe întregul interval al temperaturilor.

48. Să se stabilească expresia entropiei unui gaz ideal ca funcție de *(T,V), (T,p) și (p,V),* apoi să se particularizeze pentru trecerea gazului între stările 1 și 2 în transformările : izobară, izocoră, izotermă și adiabatică.

49. Două recipiente de volume V_1 si V_2, conțin 1, respectiv 2 moli de gaz ideal din specii diferite, separate printr-un robinet. Gazele fiind la aceeași temperatură T, să se calculeze variația entropiei ansamblului celor două gaze produsă prin difuzia lor, în urma deschiderii robinetului.

50. Se amestecă prin difuzie două gaze diferite considerate ideale, aflate în aceleași condiții de presiune și volum. Să se calculeze variația entropiei, cunoscând numărul de moli 1 și 2 din fiecare componentă a amestecului. Se presupune că prin difuzie presiunea și temperatura rămân constante.

51. Considerăm două gaze ideale identice, având aceeeași temperatură T și același număr de particule N, iar presiunile p_1 și p_2 diferite. Gazele se află în două vase, care la un moment dat sunt puse în comunicație. Să se calculeze variația de entropie a gazelor.

52. Două gaze ideale, aflate la aceași presiune p și la temperaturi diferite T_1 și T_2 conțin același număr de particule N. Gazele sunt închise în două recipiente de volume V_1 și V_2. La un moment dat cele două recipiente sunt puse în comunicație. Să se calculeze variația entropiei acestui proces.

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

53. Folosind principiile termodinamicii să se stabilească expresia dependenței de volum a unui gaz ideal şi a unui gaz real Van der Waals.

54. Un mol de gaz ideal, aflat inițial la presiunea p_1 şi temperatura T_1 se destinde după legea $T = aV - bV^2$ unde a şi b sunt constante. Se cere :
1. variația energiei interne ΔU a gazului prin dublarea volumului;
2. relația dintre a şi b pentru ca energia internă în starea finală a gazului să fie egală cu energia internă în starea inițială;
3. lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul destinderii cu dublarea volumului. Se presupun cunoscute constanta R şi exponentul adiabatic γ.

55. Calculați valoarea presiunii finale în cazul unui gaz perfect al cărui exponent adiabatic este egal cu $\frac{5}{3}$ şi care suferă o transformare izentropă între temperaturile $T_1=300K$ şi $T_2=1200K$.

56. Entropia unui amestec de două gaze ideale, care umplu volumul V -conform teoremei Gibbs– este egală cu suma entropiilor celor două gaze considerate separat, entropii calculate în ipoteza că fiecare gaz umple întreg volumul V. Pecizați motivul pentru care acestă teoremă nu este aplicabilă în cazul gazelor identice.

57. Entropia a ν moli de gaz ideal care ocupă la temperatura T volumul V (V fiind volumul unui mol) este egală cu $S_\nu = \nu C_V \ln T + \nu R \ln \nu V + b_\nu$, unde b_ν este o constantă ce depinde de ν. Precizați acestă dependență în baza condiției de aditivitate a entropiei.

58. *Principiul lui Boltzmann* presupune că între entropia S şi probabilitatea de stare a sistemului Ω, există o legătură funcțională. Folosindu-ne de aditivitatea entropiei şi de proprietățile probabilităților, să se stabilească *relația lui Boltzmann* $S = k \ln\Omega$.

59. Calculați entropia gazului Van der Waals ce satisface ecuația termică de stare

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$$

şi ecuația calorică $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$ apoi precizați ecuațiile curbelor izentrope în diagramele (V,T) şi (V,p).

60. Pornind de ecuația fundamentală a termodinamicii, să se deducă ecuația energiei :

61. Un mol de gaz ideal se destinde adiabatic în vid de la volumul V_1 la V_2. Să se calculeze variația de entropie în acest proces şi să se arate că procesul de destindere este ireversibil. Calculați variația entropiei la o comprimare izotermă a gazului de la o presiune $p_1 = 1atm.$ la $p_2 = 10atm.$

62. Două corpuri identice cu masa $m = 10Kg$ şi căldura specifică la presiune constantă $c_p = 400\ J\ Kg^{-1}K^{-1}$ au respectiv temperaturile $T_a = 600\ K$ şi $T_b = 300\ K$.

Evaluați cantitatea de energie maximă ce poate fi transferată de către sistem sub formă

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI FIZICA

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de lucru mecanic în absența altor rezervoare și cantitatea de energie "netransferabilă" prin lucru mecanic.

63. Stabiliți pentru un sistem termodinamic oarecare relația $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V$ în care C_V este capacitatea calorică la volum constant a sistemului .

64. Capacitățile calorice ale unui gaz ideal C_p și C_V, nu depind de presiune sau de volum.

65. Un fir care are lungimea inițială l_0 este solicitat de forța F. Căldura necesară variației temperaturii firului cu dT și a tensiunii în fir cu dF este $dQ_{rev} = C_F dT + bdF$, unde C_F este capacitatea calorică la tracțiune constantă, iar b este energia transferată sub formă de căldură în condiții izoterme pentru creșterea lui F cu o unitate.

Stabiliți expresia variațiilor ΔS a entropiei și ΔU a energiei interne în variabilele T și F, deduceți relația $b = T\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_F$ și exprimați diferența $C_l - C_F$ între capacitățile calorice la *lungime constantă* C_l și *la forță constantă* C_F.

66. Asupra unui fir de lungime l_0 și secțiune s acționează o forță f generând o tracțiune reversibilă izotermă. Să se determine: alungirea Δl a firului, variația ΔS a entropiei, variația ΔU a energiei interne precum și energia transferată sistemului sub formă de căldură.

67. Să se calculeze variația energiei libere F și a entalpiei libere G a unui mol de gaz biatomic având $C_V = 20{,}9 J/Kmol \cdot K$, când acesta este încălzit de la $0^0 C$ la $100^0 C$.

a) într-o transformare izocoră la $V = 1l$ și
b) într-o transformare izobară la $p = 1atm$.

68. Să se calculeze: variația ΔS a entropiei, ΔF a energiei libere și ΔG a entalpiei libere în procesul comprimării unui gaz ideal la temperatura de $20^0 C$, de la presiunea de *1atm.* la *100 atm.*

69. Evaluați lucrul mecanic util maxim ce se poate obține prin răcirea unui mol de gaz ideal la $V = const.$, de la temperatura T la temperatura T_0 a mediului înconjurător.

70. Arătați că în condițiile în care p și T sunt constante:

1)entalpia liberă nu poate crește, iar în stările de echilibru are valoare minimă;

2) variația entalpiei libere reprezintă lucrul mecanic minim furnizat sistemului de alte forțe decât cea de presiune. Deduceți expresia lucrului mecanic util maxim obținut prin expansiunea unui mol de gaz ideal de la presiunea p_1 la p_2, la temperatura constantă T_0 a mediului ambiant, dacă presiunea mediului ambiant este p_0.

71. Stabiliți expresia potențialului chimic al gazului ideal.

72.. Considerăm că expresia: $dQ = C_V dT + \lambda_V dV = C_p dT + \lambda_p dp = m_V dV + m_p dp$ reprezintă pentru un sistem descris prin parametrii de stare p, V și T căldura elementară primită într-un proces quasistatic. 1) Stabiliți relațiile:

BCU IAȘI - CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

a) $m_v = \lambda_v C_p/(C_p - C_v), m_p = -\lambda_p C_p/(C_p - C_v)$

$m_v/\lambda_v + m_p/\lambda_p = 1$

b) $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -(C_p - C_v)/\lambda_p; \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = (C_p - C_v)\lambda_v$

2) Presupunând, în baza teoremei lui Nernst că entropia rămâne finită şi continuă când $T \to 0$, să se arate că pentru $T \to 0$, fiecare dintre mărimile C_v, C_p, λ_p, λ_v, m_v, m_p tinde la zero.

73. Analizaţi comportarea funcţiilor caracteristice pentru $T \to 0\ K$.

74. Cunoscând variaţia $\Delta F = 0{,}58\ KJ$ a energiei libere să se calculeze variaţia entropiei într-un proces izoterm pentru gazul ideal la temperatura $\theta = 16{,}84^0 C$.

75. Să se deducă prima relaţie Gibbs-Helmholtz $U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\{a_i\}}$, $i = \overline{1,l}$ în cazul unui sis - tem caracterizat de l parametri externi şi l forţe generalizate, apoi să se arate că

$$F(V,T,\{a_i\}) = \frac{T}{T_0} F(V_0,T_0,\{a_i\}) - T\int_{T_0}^{T} \frac{U}{T^2} dT$$

76. Pornind de la relaţiile (2.166) şi (2.176) să se calculeze variaţia energiei libere şi a entalpi- ei libere pentru un gaz perfect.

77. Să se calculeze pentru un gaz perfect variaţia entalpiei libere într-un proces izoterm, în funcţie de volumul iniţial V_1 şi de cel final, V_2.

78. Pornind de la relaţiile Maxwell, să se exprime $C_p - C_V$ în funcţie de entropie.

79. În baza faptului că dS este o diferenţială totală exactă să se stabilească relaţia

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad (1)$$

apoi să se găsească expresia entropiei unui gaz care satisface următoarele relaţii

$$V = V_0[1 + a(T - T_0)] \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0 \qquad (3) \text{ şi}$$

$$C_p = const. \qquad (4)$$

a fiind de asemenea, o constantă.

80. Să se calculeze lucrul mecanic de vaporizare a unui mol de apă la trecerea lui în vapori la temperatura de *100* grade Celsius şi presiunea atmosferică normală. Să se specifice valoarea cantităţii de căldură transferate în acest caz, sistemului.

I.3 FIZICĂ STATISTICĂ

1. Precizaţi traiectoria punctului figurativ în spaţiul fazelor pentru un corp de masă m care este aruncat de jos în sus cu viteza iniţială v_0 în câmp gravitaţional de la înălţimea h_0.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. Precizați traiectoria punctului figurativ în spațiul fazelor pentru un oscilator armonic liniar care oscilează după legea: $q = A\cos(\omega t + \varphi)$. Verificați prin calcul direct conservarea "volumului" din spațiul fazelor în timpul mișcării.

3. Se consideră un oscilator amortizat, a cărui lege de mișcare este de forma:

$$q = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

a) precizați și reprezentați grafic traiectoria punctului figurativ în spațiul fazelor ;
b) dacă $\lambda << \omega$, stabiliți legea de evoluție în timp a volumului Ω din spațiul fazelor.

4. Să se calculeze volumul unei sfere de rază R într-un spațiu n – dimensional.

5. Un gaz ideal format din N particule și având energia E este închis în volumul V. Să se exprime cu ajutorul distribuției microcanonice:
a) Volumul corespunzător din spațiul fazelor Γ.
b) Entropia S.
c) Temperatura T a sistemului.
d) Ecuația de starea a gazului.

6. Într-un recipient de volum V se află un gaz la temperatura T, compus din N particule cu masa de repaos nulă. Știind că energia și impulsul particulei sunt corelate prin relația $E = pc$, scrieți ecuația de stare și deduceți expresia energiei interne a gazului.

7. Într-un cuptor se află un gaz perfect la temperatura T. Moleculele gazului pot părăsi cuptorul printr-un mic orificiu ajungând într-o incintă vidată.
a). Estimați numărul total de molecule ce părăsesc cuptorul în unitatea de timp, pe unitatea de arie;
b). Estimați energia cinetică medie a moleculelor emise prin orificiu și comparați valoarea acesteia cu valoarea energiei cinetice medii datorate translației moleculelor din interiorul cuptorului;
c). Stabiliți expresia vitezei celei mai probabile a moleculelor într-un astfel de fascicul molecular.

8. Se presupune că la temperatura T apropiată de punctul de fierbere, moleculele superficiale ale unui lichid se mișcă după o repartiție a vitezelor de tip Maxwell. Cunoscând căldura latentă de evaporare L și numărul de molecule din unitatea de volum n, precizați:
a) viteza de evaporare pe unitatea de arie;
b) expresia dependenței presiunii vaporilor saturați de temperatura la echilibrul statistic.

9. Calculați căldura specifică molară la volum constant pentru un gaz ideal monoatomic în cazul ultrarelativist când energia cinetică a unei molecule este $E = cp$ unde p este impulsul particulei iar c viteza luminii: a) folosind distribuția microcanonică; b) folosind distribuția canonică.

10. Scrieți funcția care descrie distribuția canonică a stărilor unei molecule de gaz ideal, nesupusă nici unui câmp de forțe exterior.

11. Estimați în baza distribuției canonice, probabilitatea ca o particulă a unui gaz ideal plasat într-un câmp exterior $U(\vec{r})$ să aibă coordonata cuprinsă în intervalul $(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r})$.

BUCHAREST UNIVERSITY LIBRARY

12. Se consideră un sistem izolat, alcătuit din 2 subsisteme la temperaturile T_1 şi T_2 de valori apropiate despărţite de un perete adiabatic şi care conţin câte un mol de gaz ideal. Să se determine de câte ori este mai mare probabilitatea termodinamică P_0 pentru ca temperatura subsistemelor să devină aceeaşi decât probabilitatea termodinamică P_1 pentru ca sistemele să rămână la temperaturile avute iniţial, în urma îndepărtării peretelui izolant. Volumele celor două compartimente sunt egale.

13. Exprimaţi energia internă U cu ajutorul funcţiei de partiţie a distribuţiei canonice (3.81):

14. Se consideră un gaz molecular care satisface repartiţia Maxwell. Calculaţi pentru o moleculă:

a. Energia cinetică medie, $\overline{E_c}$.

b. Energia cinetică pătratică medie, $\overline{E_c^2}$.

c. Abaterea pătratică medie a energiei, $\overline{E_c^2} - \overline{E_c}^2$.

15. Calculaţi valoarea minimă a masei ce poate fi estimată prin folosirea unei balanţe cu fir de cuarţ, la $300K$ cunoscând constanta elastică $K = 6 \cdot 10^6 N \cdot m^{-1}$ a resortului. Se cunosc: constanta lui Boltzmann $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$ şi acceleraţia gravitaţiei $g = 9{,}8m \cdot s^{-2}$.

16.

a) precizaţi curba pe care se plasează maximele distribuţiei maxwelliene, când temperatura variază;

b) precizaţi cel de al doilea punct de intersecţie al unei curbe de distribuţie cu curba maximelor ;

c) calculaţi raportul temperaturilor pentru care două curbe de distribuţie se intersectează chiar în punctul de maxim al celei de a doua curbe?

17. Stabiliţi expresia probabilităţii ca o moleculă aflată în câmp gravitaţional terestru, considerat omogen, să se găsească la o înălţime cuprinsă în intervalul z, $z+dz$ şi să aibă viteza cuprinsă în volumul elementar $dv_x dv_y dv_z$ din spaţiul vitezelor, centrat pe v.

18. Calculaţi numărul moleculelor $dN(v)$ care lovesc unitatea de suprafaţă a peretelui în unitatea de timp şi au modulul vitezei cuprins între v şi $v+dv$. Calculaţi apoi numărul total N de molecule care lovesc unitatea de suprafaţă a peretelui în unitatea de timp. Care este energia cinetică de translaţie E_c a celor $dN(v)$ molecule?

19. Deduceţi distribuţia maxwelliană a vitezelor moleculelor unui gaz perfect din distribuţia canonică.

20. Calculaţi procentul q de molecule din atmosferă cu energie potenţială gravitaţională mai mare decât energia lor cinetică medie de translaţie. Se va neglija variaţia cu altitudinea a temperaturii şi acceleraţiei gravitaţionale.

21. Stabiliţi expresia vitezei pătratice medii $\overline{v^2}$ în cadrul distribuţiei Maxwell – Boltzmann a moleculelor după valoarea absolută a vitezelor.

22. Să se obţină expresia mediei statistice a puterii a n – a a valorii absolute a vitezei în cadrul distribuţiei maxwelliene.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

23. Descrieți expresia energiei cinetice medii de translație $\bar{\varepsilon}$ și expresia mediei pătratului energiei cinetice de translație a moleculelor unui gaz ideal $\overline{\varepsilon^2}$ în cadrul distribuției maxwelliene.

24. Calculați probabilitatea ca în cazul distribuției Maxwell direcția vitezei să fie cuprinsă într-un unghi solid dat.

25. Calculați:
a) fracțiunea din numărul total al moleculelor unui gaz cu modulul vitezelor mai mic decât viteza $\bar{v}$.
b) fracțiunea din numărul moleculelor cu viteza mai mare decât viteza cea mai probabilă, v_p.
c) ce fracțiune din numărul total al moleculelor gazului au energia cinetică a mișcării de translație mai mare decât energia cinetică medie $\frac{3kT}{2}$.

26. Se consideră oxigen într-o incintă având volumul de $1\ mm^3$, la temperatura $300\ K$ și presiunea $2\ at$. Calculați numărul moleculelor al căror componente de viteză au valori cuprinse în intervalele: v_x între 200 și $202\ ms^{-1}$; v_y între 450 și $455\ ms^{-1}$; v_z între -300 și $-299\ ms^{-1}$.

27. Calculați numărul relativ de molecule de azot cu vitezele cuprinse la 0^0C în intervalul $250 - 260\ ms^{-1}$. Se cunoaște masa molară a azotului $\mu = 28{,}013$.

28. Folosind funcția erorilor să se calculeze numărul moleculelor dintr-un kmol de H_2 cu temperatura $T = 500\ K$:
a) care au proiecția x a vitezei $v_x < 500\ m/s$.
b) care au mărimea vitezei $v < v_0 = 10^3\ m/s$.
c) care au viteza $v > v_0 = 2 \cdot 10^3\ m/s$.

29. Folosind distribuția Maxwell să se determine numărul de particule care au energia mai mică, respectiv mai mare decât kT.

30. Estimați numărul relativ de molecule de oxigen a căror viteză la temperatura $T = 300K$ este cuprinsă în intervalul 200 m/s-$210\ m/s$. Se cunosc: masa molară a oxigenului $\mu = 32Kmol^{-1}$ și constanta R gazelor perfecte, $8310\ J \cdot Kmol^{-1}K^{-1}$.

31. Deduceți expresia vitezei medii în cazul distribuției lui Maxwell a moleculelor după valoarea absolută a vitezelor.

32. Precizați poziția centrului de greutate al unei coloane de gaz ideal aflat în câmp gravitațional omogen, cunoscând accelerația gravitației g, masa moleculei m, și temperatura, T.

33. Se consideră un gaz ideal într-un cilindru vertical de înălțime h_0 și rază r_0 care se rotește în câmpul magnetic terestru cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe verticale. Stabiliți expresia distribuției moleculelor după coordonate.

34. Arătați că centrul de greutate al unei coloane cilindrice verticale de aer, se află la cota la care densitatea aerului scade de e ori. Se vor considera temperatura și accelerația gravitațională, constante.

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

35. Un tub cilindric orizontal cu lungimea $l=1m$, închis la un capăt, se roteşte cu frecvenţa $\nu=10s^{-1}$ în jurul unei axe verticale, ce trece prin capătul deschis al tubului. Presiunea atmosferică $p(0)$ la temperatura de $17℃$ fiind cea normală să se calculeze presiunea aerului din tub lângă capătul închis. Se cunoaşte masa moleculară a aerului $\mu_{aer} = 29Kg \cdot Kmol^{-1}$.

36. Se consideră un tub orizontal lung de *1 m*, închis la ambele capete conţinând aer la presiune normală şi la temperatura de $17℃$. Calculaţi diferenţa de presiune ce apare în tub între capetele sale, pentru cazul când tubul este pus în mişcare de rotaţie, cu turaţia $\nu=200$ rotaţii pe secundă, în jurul unei axe verticale ce trece printr-unul din capete. Se va considera pentru variaţia presiunii gazului cu distanţa x faţă de ax, relaţia: $p(x) = p_0 e^{\frac{\mu\omega^2 x^2}{2RT}}$, $p_0 = p(0)$.

37. Se consideră un gaz în câmpul gravitaţional terestru considerat omogen. Precizaţi pentru acest sistem:

a) greutatea coloanei de gaz de înălţime h;
b) energia potenţială medie a unei molecule din gaz;
c) căldura molară suplimentară pe care o are în câmp gravitaţional.

38. Precizaţi dependenţa de altitudine a raportului concentraţiilor a două gaze cu masele moleculare μ_1 şi μ_2 şi calculaţi înălţimea la care conţinutul de hidrogen se dublează faţă de conţinutul de bioxid de carbon. Se cunosc: $T=280K$, $\mu_{H_2}=2$ *[kg/kmol]*, $\mu_{CO_2}=44$ *[kg/kmol]*.

I.4 ELECTRICITATE

1. Se consideră o distribuţie liniară de sarcină pe lungimea L. Să se calculeze forţa de interacţiune între această distribuţie de sarcină şi o sarcină q situată la o distanţă a de distribuţia de sarcină şi pe direcţia acesteia.

2. Stabiliţi expresia cîmpului electric în centrul unui arc semicircular, uniform încărcat.

3. Calculaţi potenţialul φ şi câmpul electric E într-un punct situat pe axa unui inel circular de rază a, încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină λ.

4. Un cilindru de rază a este încărcat cu o sarcină Q distribuită uniform în volumul cilindrului cu o densitate constantă ρ. Să se calculeze diferenţa de potenţial faţă de suprafaţa cilindrului pentru punctele din interiorul şi din afara cilindrului.

5. Se consideră un disc izolator de rază a şi grosime foarte mică, încărcat cu o sarcină pozitivă Q de densitate superficială σ. Calculaţi :

a) potenţialul electric în punctul P situat la distanţa y faţă de centrul discului (pe axa de simetrie) pentru cazurile $y>0, y<0, y=0, y>>a$;
b) câmpul electric prin componentele E_{y+} şi E_{y-} pentru care se cere să se stabilească relaţia

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E_{y+} - E_{y-} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

6. Se consideră o sferă de rază R încărcată uniform cu sarcina Q şi densitate de sarcină volumică, ρ. Calculaţi energia electrostatică a sferei.

7. Se consideră o placă metalică A verticală legată de pământ, situată în aer. La o distanţă L de placă se află un pendul format dintr-o sferă legată de un fir. Sfera este încărcată cu sarcina Q cunoscută.

a) să se arate că din punct de vedere electric, placa A al cărei potenţial φ este egal cu zero şi sfera cu sarcina Q sunt echivalente cu două sarcini $+Q$ şi $-Q$ simetrice în raport cu A.

b) calculaţi forţa electrostatică ce acţionează asupra sferei pentru $Q = 10^{-10} C$ şi $L=1m$ considerând că $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 N \cdot M^2 C^{-2}$.

8. Calculaţi forţa ce acţionează asupra sarcinii Q situată la aceeaşi distanţă L de două plăci metalice legate la pământ ce formează un unghi diedru de 90^0.

9. Sarcina electrică punctiformă $+q_1$ de masă m, aflată la distanţa a de sarcina punctiformă cu poziţie fixă $+q_2$, se pune la un moment dat ($t=0$) în mişcare cu viteza iniţială nulă sub influenţa forţei de interacţiune coulombiană. Calculaţi viteza limită a sarcinii $+q_1$ în aer şi în absenţa frecărilor. Se cunosc :

$q_1 = 10^{-9} C, q_2 = 10^{11} C, m = 10^{-3} Kg, a = 1m, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 Nm^2 C^{-2}$.

10. O sferă conductoare cu raza $R=0,1m$ poartă sarcina electrică q. Ce rază trebuie să aibă o altă sferă conductoare neutră, dacă pusă în contact cu prima şi depărtată apoi la distanţa D, este respinsă cu o forţă maximă ?

11. Explicitaţi vectorul câmp electric generat de un semiinel subţire semicircular, având raza $r=1m$, încărcat cu sarcină electrică pozitivă a cărei densitate liniară este $\lambda = 1C \cdot m^{-1}$, în centrul O al cercului din care provine semiinelul.

12. Se consideră un fir rectiliniu infinit, încărcat uniform cu sarcină pozitivă. Fie λ densitatea liniară de sarcină a firului.

a) arătaţi că vectorul câmp electric $\vec{E}$ într-un punct exterior firului, generat de sarcina firului este perpendicular pe fir.

b) aplicând teorema lui Gauss, calculaţi modulul vectorului câmp electric în acest punct. Se cunosc valorile $\lambda = 2C/m$ şi $R=5m$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

13. Se consideră un plan infinit încărcat uniform cu sarcină pozitivă cu densitatea superficială σ. Stabiliți expresia vectorului câmp electric $\vec{E}$ într-un punct exterior P planului cu ajutorul teoremei lui Gauss. Se dă $\sigma = 3\mu C/m^2$.

14. Se consideră un strat sferic încărcat cu sarcină pozitivă cu densitatea superficială $+\sigma$ și având raza R. Precizați vectorul câmp electric $\vec{E}$ generat de această sarcină.

Se cunosc: $\sigma = 2\mu c/m^2$, $R=1m$, și $r_c = 2m$.

15. O sarcină punctiformă $Q=1C$ se află la distanța $a=2m$ față de o distribuție liniară și infinită de sarcinile electrice cu densitatea liniară de sarcină $\lambda = 6\mu C/m$. Calculați forța ce acționează asupra sarcinii Q.

16. Un conductor inelar cu raza $R=1mm$ este încărcat uniform cu sarcina $Q=10C$. Fie M un punct pe perpendiculara dusă din centrul conductorului inelar.

a) scrieți expresia vectorului electric $\vec{E}$ în punctul M și calculați valoarea acestuia.
b) precizați poziția lui M astfel ca în acest punct, valoarea lui E să fie maximă și precizați de asemenea acestă valoare.

17. Sarcina $+Q$ se distribuie uniform de-a lungul unei spire circulare de rază R. O sarcină electrică $+q$ se află pe dreapta perpendiculară pe planul spirei trecând prin centrul său, la o distanță fixă h de planul spirei. Să se precizeze :

a) expresia forței $\vec{F}$ ce acționează asupra sarcinii q ;
b) distanța h_0 pentru care forța devine maximă și valoarea forței maxime.

Se cunosc : $Q = 2\mu C$; $q = 1\mu C$; $R = 2cm$.

18. Se consideră o placă dreptunghiulară de lungime $2a$ și lățime $2b$, uniform încărcate electric, cu densitatea superficială de sarcină, σ. Stabiliți expresia potențialului electric în centrul de masă al plăcii.

19. Se consideră o distribuție sferică de sarcină de rază R cu densitatea de sarcină volumică constantă, ρ. Stabiliți expresiile potențialului Φ pentru punctele din interiorul și exteriorul acestei distribuții sferice cu ajutorul ecuației Poisson. Se presupune cunoscută expresia operatorului Laplace în coordonate sferice:

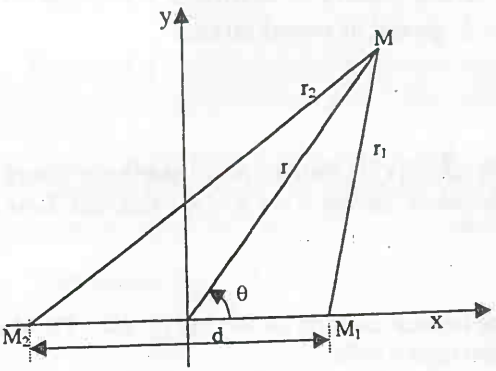
$$\Delta_{r,\theta,\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

20. Utilizând ecuația lui Poisson, stabiliți expresiile potențialului și câmpului electric produs de o sarcină electrică cu densitatea volumică ρ = constant și care ocupă volumul cuprins între două plane paralele infinite depărtate unul de celălalt la distanța a.

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

21. Să se arate că un câmp electrostatic uniform $\vec{E}_0$ admite potențialul scalar $\varphi = -\vec{E}_0 \vec{r}$.

22. Calculați potențialul câmpului electrostatic creat de o sarcină punctiformă q situată într-un mediu anizotrop omogen.



23. Două fire identice cilindrice de rază a foarte mică sunt dispuse în vid paralele între ele la o distanță $d \gg a$. Primul fir poartă densitatea liniară de sarcină electrică λ, iar cel de-al doilea – λ;

1). Să se calculeze potențialul electrostatic $\varphi(r_1, r_2)$ într-un punct M luând $\varphi=0$ pe axa Oy.

2). Să se studieze cazul particular

$$\lim_{d\to 0} \lambda d = p = const .$$

24. Spațiul dintre două sfere metalice concentrice de raze R_1 și R_2 ($R_1 > R_2$) este ocupat de un metal caracterizat de conductivitatea σ. Dacă între cele două sfere se stabilește o diferență de potențial constantă $\Phi_2 - \Phi_1$ se cere să se determine intensitatea curentului ce se stabilește între ele și rezistența electrică a stratului.

25. Se consideră o distribuție de sarcină ce manifestă simetrie sferică. În jurul unui punct O potențialul care descrie o interacție de distanță finită a este: $\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} exp(-r/a)$.

Precizați expresia câmpului electrostatic creat de această distribuție pentru cazurile $r<<a$,și $r>>a$, apoi calculați fluxul electric printr-o sferă de rază r și stabiliți repartiția de sarcină caracterizată prin densitatea $\rho(r)$.

26. Se consideră un condensator sferic alcătuit din două sfere conductoare concentrice A și B de raze R_1 și R_2, încărcate electric cu sarcina Q.

a).Stabiliți expresia capacității condensatorului sferic; (se menține sfera A izolată la potențialul ϕ);

b).Evaluați potențialul și capacitatea sferei A, aceasta este înconjurată de sfera B în cazurile:

b_1 – sfera B este izolată ;

b_2 – sfera B este legată la pământ.

27. Se consideră un condensator sferic de raze a și b încărcat cu sarcina Q. Arătați că prin conectarea sferei A la pământ, capacitatea condensatorului sferic se mărește de b/a ori.

28. Folosind teorema lui Gauss, calculați intensitatea câmpului electric produs de următoarele

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

distribuții simetrice de sarcini electrice:

a) fir rectiliniu foarte lung, încărcat cu sarcini pozitive de densitate liniară τ,

b) conductor plan infinit, încărcat cu sarcini pozitive de densitate superficială σ;

c) sferă de rază R încărcată cu sarcina $+Q$.

29. Deduceți expresiile potențialului și intensității câmpului electric generat de un dipol electric având momentul dipolar electric, $\vec{p}$.

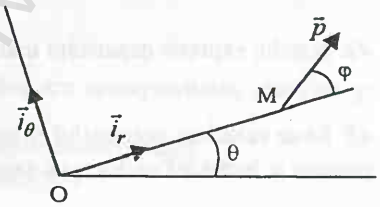
30. Să se deducă și să se comenteze expresia energiei de interacțiune între un dipol electric de moment electric dipolar $\vec{p}$ și un câmp electrostatic cu intensitatea $\vec{E}$.

31. Se consideră o sarcină $2q$ în originea O și două sarcini egale cu $-q$ pe axa OX în punctele de abscisă $x = -a$ și $x = a$. Să se calculeze potențialul într-un punct M situat la distanța $r >> a$ de originea O.

32. O sarcină punctuală Q se află în originea O a unui referențial. Un dipol electric de moment $\vec{p}$ este plasat într-un punct M.

a).Calculați forța și momentul forței exercitate de sarcina Q asupra dipolului.

b).Regăsiți aceste rezultate pornind de la principiul acțiunii și reacțiunii.



33. O sarcină punctiformă Q se află în originea O a unui referențial. Un dipol electric de moment dipolar $\vec{p}$ este plasat într-un punct M.

Calculați forța și momentul forței exercitate de sarcina Q asupra dipolului.

34. Stabiliți expresia energiei electrostatice a unei sfere de rază R încărcată uniform în volum cu sarcina electrică Q.

35. O sarcină q se află la înălțimea h deasupra unui plan conductor. Calculați lucrul mecanic necesar pentru a deplasa această sarcină de la înălțimea h la infinit.

36. O sarcină Q este distribuită pe două condensatoare plane identice conectate în paralel. La momentul inițial $t = 0$ distanța între plăcile unui condensator începe să crească uniform după legea $d_1 = d + vt$, iar distanța între plăcile celuilalt începe să scadă uniform după legea $d_2 = d - vt$. Neglijând rezistența firelor de legătură să se determine intensitatea curentului în circuit pe durata mișcării plăcilor condensatoarelor și să se precizeze sensul curentului.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

37. O sferă conductoare de rază R este înconjurată de o pătură dielectrică sferică concentrică de rază exterioară $R' > R$ cu permitivitatea relativă ε_r. Calculați capacitatea acestui conductor.

38. O sarcină punctiformă q se găsește în vid la distanța a de suprafața plană care mărginește un spațiu dielectric de permitivitate ε_r. Calculați forța care acționează asupra sarcinii q.

39. Armătura internă a unui condensator sferic este acoperită cu un strat subțire de dielectric de grosime h și permitivitate relativă ε_r. Calculați creșterea δC a capacității condensatorului datorată stratului dielectric. Se cunosc razele armăturilor R_1 ($R_2 > R_1$).

40. Se consideră o distribuție oarecare (dar mărginită) în vid. Fie W_0 energia câmpului electrostatic. Dacă însă spațiul este ocupat de un dielectric ce poate fi neomogen (și chiar anizotrop), energia câmpului electrostatic al aceleiași distribuții de sarcini va avea o altă valoare W. Să se arate că $\delta W = W - W_0 = -\frac{1}{2}\int \vec{P}\cdot\vec{E}_0 dv$ unde $\vec{P}$ reprezintă polarizarea dielectricului iar $\vec{E}_0$ intensitatea câmpului electrostatic inițial.

41. Stabiliți expresia capacității unui condensator cilindric.

42. Stabiliți expresia capacității unui condensator sferic.

43. Să se calculeze potențialul și intensitatea câmpului electric în cazul unei plăci infinite de grosime a, încărcată uniform cu sarcină electrică de densitate volumică ρ = const.

44. Precizați expresiile potențialului și intensității câmpului electric generate de un cilindru cu raza a încărcat uniform cu sarcină electrică de densitate volumică $\rho = const$.

45. O sferă metalică de rază $r = 20\ cm$ este situată concentric în interiorul unei sfere metalice goale cu raza interioară $R = 21cm$ pusă la pământ. Se încarcă sferele cu sarcină electrică sub o diferență de potențial constantă $\phi = 10^3 V$. Să se calculeze:

a) valoarea maximă E_{max} a intensității câmpului electric în pătura sferică de aer conținută între aceste două sfere;
b) considerând raza sferei mari constantă, iar r variabil, stabiliți valoarea lui r pentru care E_{max} trece printr-un minim;
c) valoarea energiei furnizată de sursă pentru încărcarea sistemului presupus în geometrie inițială.

46. O sferă din material dielectric omogen cu permitivitatea relativă ε_r este introdusă într-un câmp electric uniform de intensitate E. Calculați intensitatea câmpului electric rezultant E_1 în centrul sferei considerând că polaritatea sferei dielectrice este uniformă.

BOUAS UNIVERSITY LIBRARY

47. Între armăturile unui condensator plan paralel, situate la distanța $d=2,2mm$, legate la bornele unei surse cu tensiune continuă $U = 1\ 000V$, se introduce o placă de sticlă având $\varepsilon_r = 6$, care umple complet spațiul dintre armături. În cazurile:

1) condensatorul aflat în permanență sub tensiunea constantă a sursei de alimentare;

2) înainte de introducerea plăcii de sticlă, condensatorul se deconectează de la sursă, să se calculeze: a)densitatea superficială a sarcinilor de polarizare de pe suprafața dielectricu - lui; b) cu cât se modifică densitatea superficială inițială a sarcinii de pe suprafața armăturilor condensatorului.

*48.*Un condensator plan paralel având capacitatea de $7\ nF$ și ca dielectric aerul, este încărcat la o sursă cu tensiunea de $300\ V$ și apoi se decuplează rămânând încărcat. Prin introducerea unui dielectric ce umple complet spațiul dintre armături, tensiunea la bornele condensatorului scade la $100\ V$. Calculați sarcina de polarizare Q_p indusă pe fiecare față a dielectricului.

49. Permitivitatea unui dielectric care umple spațiul dintre plăcile unui condensator plan,a căror arie este $S = 100\ cm^2$, variază liniar de la $\varepsilon_r = 4\varepsilon_0$ lângă prima placă, până la valoarea $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_0$ lângă cealaltă. Distanța între plăci este de $2\ mm$. Calculați:

a) valoarea capacității condensatorului;

b) densitățile de suprafață și de volum ale sarcinii de polarizare. Se va considera că plăcile condensatorului conțin sarcinile Q și $-Q$ și se vor neglija efectele de margine. Arătați că sarcina totală de polarizație este nulă.

50. Dielectricul dintre armăturile unui condensator plan are susceptivitatea electrică $\chi=3$. Distanța între armături este $d = 2\ mm$. Să se calculeze:

a) densitatea sarcinilor de polarizare de pe armăturile dielectricului;

b) densitatea sarcinilor de pe armăturile condensatorului.

51. Să se precizeze comportarea vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{D}$ la suprafața de separare a doi dielectrici.

52. Calculați intensitatea câmpului electric în centrul unei sfere goale aflate în interiorul unui dielectric.

53. Permitivitatea unei sfere dielectrice neomogene de rază R, aflată în vid,variază după legea $E(r) = E_0\left(\frac{r}{R} + 2\right)$.Calculați câmpul electric creat de o sarcină Q distribuită uniform în între - gul volum al sferei.

54. În centrul unei sfere dielectrice omogene, de rază R și de permitivitate relativă ε_r se găsește o sarcină punctiformă q.Calculați densitatea σ_p a sarcinilor de polarizare pe suprafața sferei presupunând că sfera se află în vid.

55. O sferă dielectrică de rază R este polarizată uniform. Să se calculeze densitatea de sarcină echivalentă acestei polarizări. Să se arate că această distribuție de sarcină poate fi înlocuită de

BCU KSI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

două distribuţii volumice de sarcină, sferice, de centre O_1 şi O_2 de rază R, de densităţi ρ şi $-\rho$ uniforme şi opuse,unde $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{a}\left(|\vec{a}| << R\right)$. Să se calculeze câmpul electric şi potenţialul electrostatic în interiorul şi exteriorul sferei polarizate.

56. Se consideră o sferă de rază R uniform polarizată $\vec{P}$; fie potenţialul $d\varphi$ datorat momentului $d\vec{p} = \vec{P}dV$ corespunzător elementului de volum dV. Să se calculeze potenţialul electromagnetic în interiorul şi exteriorul sferei.Să se calculeze câmpul electric E corespunzător.

57. O bară cilindrică de rază R şi lungime mare este polarizată uniform într-o direcţie perpendiculară pe axa sa. Să se deducă potenţialul electrostatic şi câmpul corespunzător în interiorul şi în exteriorul barei.

58. O sferă dielectrică de rază R este polarizată permanent $\vec{P} = \frac{A}{r^2}\vec{r}$, unde A este o constantă (se consideră originea axelor de coordonate în centrul sferei). Să se calculeze densităţile volumică şi superficială de sarcină echivalentă. Să se calculeze sarcina totală a sferei. Să se determine câmpul şi potenţialul electric în interiorul şi în exteriorul sferei.

59. Un condensator este constituit din două armături cilindrice coaxiale de lungimi l separate prin trei straturi cilindrice coaxiale de dielectrici diferiţi cu permitivităţile $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ şi cu razele exterioare r_1, r_2, r_3; fie a raza armăturilor interioare, iar r_3 cea a armăturii exterioare. Să se calculeze capacitatea condensatorului.

60. O sarcină punctiformă se află în centrul unei cavităţi sferice de rază r_1, practicată într-o sferă dielectrică de rază r_2 şi permitivitate ε. Să se calculeze câmpul electrostatic $\vec{E}$ într-un punct arbitrar, polarizarea $\vec{P}$ şi densităţile de sarcină echivalente.Să se studieze cazul $r_1 \to 0$.

61. Un condensator plan de mari dimensiuni cu aer creează între armăturile sale un câmp uniform $\vec{E}_0$.O sferă mică dielectrică de permitivitate ε şi rază a se află între armăturile condensatorului. Să se calculeze câmpul electric şi potenţialul în interiorul şi în exteriorul sferei.

62. O bară lungă dielectrică cilindrică de rază a, de permitivitate ε, se află în vid sub influenţa unui câmp electric $\vec{E}_0$ uniform perpendicular pe axa sa. Să se afle câmpul electric şi potenţialul corespunzător în interiorul şi în exteriorul barei. Se va presupune că polarizarea în bară este uniformă şi paralelă cu câmpul electric $\vec{E}_0$.

63. Într-o sferă dielectrică de permitivitate ε şi de rază b se practică o cavitate sferică concen

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

trică de rază a ($a < b$). Se aduce o sarcină punctuală q de la infinit în centrul sferei. Să se calculeze variația δU_e de energie electrostatică care rezultă. Caz particular $b>>a$.

64. O sferă conductoare de masă m pluteşte la suprafaţa unui fluid dielectric de permitivitate ε. Neîncărcată, sfera are un sfert din volumul său la echilibru în dielectricul lichid. Se încarcă sfera la un potenţial φ. Să se calculeze potenţialul φ pentru care jumătate din sferă rămâne în dielectric (în această situaţie câmpul $\vec{E}$ este radial).

65. Să se deducă expresia intensităţii câmpului magnetic la distanţa r faţă de axul unui conductor cilindric foarte lung, cu raza R, străbătut de un curent cu intensitatea I, repartizat uniform în toată secţiunea conductorului.

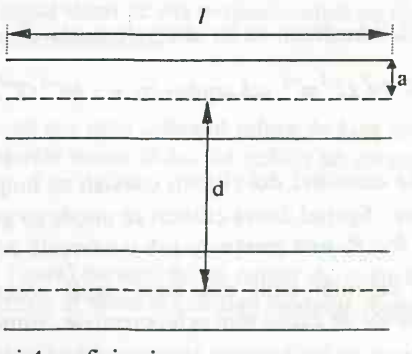
66. Se consideră o ţeavă cilindrică metalică cu raza exterioară R_e şi raza interioară R_i. Conductorul este parcurs de un curent I, repartizat uniform în secţiunea conductoare. Să se determine intensitatea câmpului magnetic H într-un punct situat la distanţa: a) $r > R_e$; b) $R_i \le r \le R_e$; c) $r < R_e$.

67. Precizaţi vectorul inducţie magnetică $\vec{B}$ al câmpului creat de un curent I, uniform distribuit în secţiunea unui conductor cilindric infinit, de rază R şi permitivitate μ, aflat în vid.

68. Un conductor infinit, străbătut de un curent de intensitate I, uniform distribuit în secţiune are forma unui tub limitat de doi cilindri necoaxiali, de raze R_1 şi R_2 ($<R_1$). Distanţa între axele cilindrilor este $a<R_1-R_2$. Calculaţi câmpul magnetic în cavitatea cilindrică de rază R_2.

69. Calculaţi forţele totale $\vec{F}_{12}$ şi $\vec{F}_{21}$ cu care acţionează unul asupra altuia două circuite filiforme, străbătute respectiv de curenţii I_1 şi I_2.

70. Se consideră doi cilindri foarte alungiţi şi identici de lungime l şi de rază a aşezaţi orizontal paralel la o distanţă d. Se va considera $a \ll d \ll l$.



1). Cilindrul (1) poartă sarcina electrică Q iar cilindrul (2) sarcina $-Q$. Să se calculeze potenţialele φ_1 şi φ_2 ale celor doi cilindri. Se consideră sarcina electrică uniform repartizată liniar

2) Să se determine capacitatea liniară γ definită de relaţia $Q/l=\gamma(\varphi_1-\varphi_2)$. Caz numeric $d=0,3$ m, $a=5 \cdot 10^{-5}$ mm;

3) Cei doi cilindri fiind iniţial neîncărcaţi electric sunt aduşi apoi la potenţialele φ_1 şi respectiv φ_2. Să se calculeze sarcinile electrice cu care se încarcă cei doi cilindri şi să se determine cei 4 coeficienţi c_{ij}.

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4) Dacă mărimea l creşte indefinit, să se determine limita coeficienţilor liniari $\frac{c_{11}}{l}$, $\frac{c_{12}}{l}$, $\frac{c_{22}}{l}$. Să se compare aceste valori cu capacitatea γ precedentă.

71. Stabiliţi expresia densităţii curentului electric ce trece prin vid, între doi electrozi plani situaţi la distanţa L unul de altul, între care s-a aplicat o diferenţă de potenţial U_a în condiţiile în care electronii părăsesc catodul cu viteză nulă iar în jurul catodului se află un număr mare de electroni, ce alcătuiesc o sarcină de densitate ρ. Se presupune că la suprafaţa catodului câmpul electric este nul.

72. Calculaţi rezistenţele radială şi circulară ale unui inel de cupru cu secţiune rectangulară având razele $r_1 = 20\ mm, r_2 = 60\ mm$ şi grosimea $e = 6\ mm$. Se consideră pentru rezistivitatea cuprului $\rho = 1{,}6\mu\Omega \cdot cm$.

73. Se consideră un semiconductor a cărui rezistenţă variază cu temperatura t după legea $R = R_0(1 - \mu t)$ unde R_0 este rezistenţa la temperatura $t = 0^0 C$ şi $\mu > 0$. Semiconductorul este conectat la o sursă de tensiune la borne U.

Estimaţi temperatura de echilibru a semiconductorului dacă temperatura mediului înconjurător este de 0^0 C, iar puterea disipată de semiconductor în mediul înconjurător este exprimată prin relaţia $P = b\Delta t$ în care Δt este diferenţa între temperaturile semiconductorului şi cea a mediului înconjurător. Se neglijează variaţia dimensiunilor semiconductorului cu temperatura. Precizaţi valoarea maximă a tensiunii la care se mai poate stabili echilibrul termic.

74. O spiră conductoare de diametru d, fixă se găseşte într-un câmp magnetic, a cărui inducţie $\vec{B}$ variază în timp după legea $B = B_m \sin\omega t$. Normala $\vec{n}$ face un unghi constant θ cu vectorul $\vec{B}$. Se cer : a) t.e.m. maximă indusă în spiră; b)Intensitatea maximă a curentului, I_m care apare în spiră, aceasta având o rezistenţă R; c)sarcina electrică ce străbate secţiunea normală a conductorului din care este confecţionată spira la momentele $t_1 = 0$ şi $t_2 = T/4$.

75. Se consideră un mediu de conductivitate γ şi constantă dielectrică ε_0. Să se calculeze raportul α al amplitudinilor curentului de conducţie şi curentului de deplasare rezultate în urma excitării mediului cu un câmp alternativ $\vec{E} = 2\pi \cdot 10^6\ s^{-1}$ pentru mediile cu conductivităţile: $\gamma = 6 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}m^{-1}$ sol argilos cu $\gamma = 10^{-4}\ \Omega^{-1}m^{-1}$ şi sticlă, $\gamma = 10^{-6}\ \Omega^{-1}m^{-1}$.

76. Se consideră doi cilindri coaxiali cu lungimea l, din cupru, prin care s-a stabilit un curent electric. Spaţiul dintre cilindri se umple cu grafit având rezistivitatea ρ. Cilindrii având razele R_1 şi R_2 (R_1 sunt menţinuţi sub o diferenţă de potenţial constantă, U_0. Considerând conductivitatea cuprului mult mai mare decât aceea a grafitului, putem considera că suprafeţele cilindrilor de cupru sunt echipotenţiale. Ştiind că între doi cilindri coaxiali distribuiţi cu sarci-

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

nă electrică, intensitatea câmpului electric este invers proporțională cu distanța r de la punctul în care considerăm câmpul la axul comun al cilindrilor, calculați intensitatea curentului și rezistența electrică a grafitului.

77. Spațiul dintre două sfere metalice concentrice de raze r_1 și r_2 ($r_2>r_1$) este umplut cu un mediu conductor de rezistivitate ρ. Estimați rezistența măsurată între fața interioară și cea exterioară. Care va fi valoarea acestei rezistențe dacă raza sferei exterioare tinde la infinit? Estimați valoarea intensității curentului ce se stabilește în mediul conductor dacă sferele se mențin la o diferență de potențial constantă $\varphi_2-\varphi_1$?

78. Un disc dintr-un material izolat subțire, având raza $R=3cm$, este uniform încărcat pe una din fețe cu sarcina electrică $Q=1mC$. Discul se rotește în aer în jurul axului său cu frecvența de $50Hz$. Calculați inducția magnetică în centrul discului.

79. Aparent ar fi de presupus o analogie între inducția magnetică $\vec{B}$ și inducția electrică $\vec{D}$, precum și între câmpul magnetic $\vec{H}$ și câmpul electric $\vec{E}$. Dovediți că în realitate analogia este inversă.

80. Să se stabilească expresia inducției magnetice produse de un curent cu intensitatea I care parcurge o spiră circulară de rază R, într-un punct din planul spirei situat la distanța a ($a<R$) de centrul ei.

81. Să se calculeze câmpul magnetic creat de curentul de intensitate I în centrul unui circuit în formă:
a) de pătrat;
b) de poligon regulat cu n laturi;
c) în cazul când cumărul n de laturi ale poligonului regulat tinde spre infinit ($n \to \infty$).
Se consideră că sensul curentului prin aceste circuite este cel corespunzător mișcării acelor de ceasornic și că circuitele se află într-un mediu care nu este magnetic.

82. Se consideră o spiră circulară de rază R parcursă de un curent cu intensitatea I. Se cere valoarea intensității câmpului magnetic H într-un punct situat pe axa perpendiculară pe planul spirei care trece prin centrul spirei la distanța x de centrul acesteia.

83. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic pe axa unui solenoid infinit de lung având n spire pe unitatea de lungime,cunoscând că prin spirele solenoidului s-a stabilit un curent cu intensitatea I.

84. Se consideră un conductor de formă circulară (spiră) parcurs de un curent de intensitate constantă, I. Desenați spectrul liniilor de câmp magnetic al spirei și calculați modulul vectorului inducție magnetică $\vec{B}$ într-un punct M aflat la distanța z pe o dreaptă perpendiculară pe pla-

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

nul spirei şi care trece prin centrul acesteia.

85. Se consideră o bară magnetică lipsită de dispersie pentru care se cunosc: lungimea *l*, secţiunea un pătrat cu latura *a*,inducţia magnetică *B* şi câmpul magnetic, *H*.Calculaţi susceptibilitatea magnetică, intensitatea de magnetizare şi momentul magnetic al barei.

86. Stabiliţi expresia modulului vectorului inducţie magnetică $\vec{B}$ într-un punct M situat la distanţa a de un conductor de lungime finită parcurs de un curent constant cu intensitatea *I* cunoscută, apoi particularizaţi această expresie în cazul conductorului rectiliniu infinit de lung.

87. Pe un tor de Fe cu secţiunea $S = 12,56cm^2$ şi cu diametrul $D = 50cm$, este înfăşurată, spiră lângă spiră, o bobină din fir de Cu cu diametrul firului $d = 1,57mm$. Dacă la capetele firului se aplică o tensiune $U = 2,2\ V$ bobina este străbătută de un flux $\Phi = 16\ 10^{-2} Wb$. Rezistivitatea cuprului $\rho = 1,7 \cdot 10^{-2}\ \Omega m$. Se cer:

a) curentul care circulă prin bobină
b) inductanţa proprie a bobinei
c) permeabilitatea relativă a Fe
d) câmpul creat în interiorul bobinei

88. Un magnet permanent în formă de cilindru de înălţime *e* şi de rază *R* este magnetizat uniform şi paralel cu axa sa.Să se calculeze vectorii $\vec{B}$ şi $\vec{H}$ într-un punct P pe axa sa, în interiorul şi în exteriorul magnetului. Să se studieze cazurile limită $e<<R$ (disc) şi $e>>R$ (bară).

89. O bară foarte lungă de secţiune circulară cu raza *a* are o magnetizare paralelă cu axa sa (considerată axa Oz). Magnetizarea este de forma $\vec{M} = \frac{r}{a} M_0 \vec{l}_z$. Să se calculeze densităţile de curenţi echivalenţi acestei magnetizări. Să se determine inducţia magnetică $\vec{B}$ în interiorul şi în exteriorul barei.

I. 5 ELECTROMAGNETISM

1. O undă electromagnetică plană cade sub incidenţă normală pe o lamă cu feţe plan paralele de grosime *l*. Lama este formată dintr-o substanţă cu $\mu_r = 1$ şi a cărei permitivitate electrică descreşte exponenţial de la valoarea ε_1 pe faţa superioară şi până la valoarea ε_2 pe faţa inferioară.Care este timpul necesar undei să străbată lama ?

2. O undă electromagnetică plană $\vec{E} = \overrightarrow{E_0} \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$ se propagă în vid.Considerând cunoscute mărimile $\overrightarrow{E_0}$ şi $\vec{k}$, să se determine vectorul câmp magnetic $\vec{H}$ la timpul *t* în originea axelor.

3. În cazul mediilor fără sarcină spaţială ($\rho = 0$) şi fără curenţi ($j = 0$),din ecuaţiile Maxwell se poate obţine ecuaţia de evoluţie spaţiu – timp a câmpului electric $\vec{E}(\vec{r},t)$ sub următoarea

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

formă : $\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad v = (\varepsilon\mu)^{-\frac{1}{2}}$.

Considerând cazul unidimensional, $\vec{E} = \vec{E}(x,t)$ stabiliți forma generală a ecuației de evoluție cu ajutorul schimbării de variabilă $X = t - \frac{x}{v}, Y = t + \frac{x}{v}$.

4.. Cunoscând expresia operatorului lui Laplace în coordonate sferice

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}$$

precizați expresia generală a soluției ecuației undelor pentru cazul câmpului electromagnetic cu simetrie sferică.

5. Arătați că soluția obținută prin separare variabilelor în ecuația de propagare a undelor electromagnetice este periodică în timp și spațiu.

6. Arătați că o suprapunere a undelor electromagnetice plane $E(x,t) = E_0\, exp[-i(\omega t - k r)]$ dată de relația : $E(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) exp[-i(\omega t - k x)]d\omega$ verifică ecuația unidimensională a undelor.

7. Pentru o undă plană de pulsație ω și vector de undă de modul k se definesc *vitezele*: ***de fază*** $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ și ***de grup*** $v_g \frac{d\omega}{dk}$.

1°. Să se demonstreze relația Rayleigh, $v_g = v_\varphi - \lambda\frac{dv_\varphi}{d\lambda}$ unde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ este lungimea de undă în mediul considerat.

2°. Indicele de refracție a sulfurii de carbon are valorile următoare pentru diverse lungimi de undă λ_0 în vid.

$\lambda_0(\mu m)$	0,589	0,550	0,486
n	1,628	1,640	1,652

Alcătuiți un tabel conținând $v_\varphi = \frac{c}{n}$ în funcție de $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, unde c este viteza luminii în vid. Michelson a măsurat în lumină albă prin metoda Foucault viteza luminii și a găsit valoarea $u = c/1{,}77$. Să se compare acest rezultat experimental cu c/n dat de relația Rayleigh pentru $\lambda_0 = 0{,}55\ \mu m$. Ce reprezintă viteza u măsurată prin metoda Foucault?

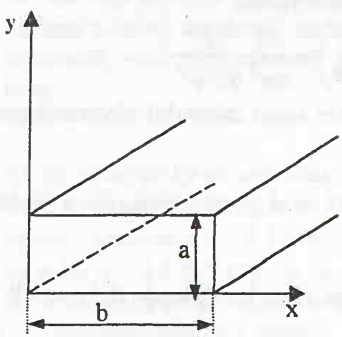
8. O undă electromagnetică staționară se propagă în vid în lungul axei Ox: $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos kx \cos\omega t$ Precizați expresia componentei $\vec{B}(x,t)$ a undei.

9. Pornind de la ecuația Maxwell $\nabla\vec{D} = \rho$ unde $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ arătați că în cazul unui mediu fără sarcină spațială *($\rho = 0$)*, atât câmpul electric cât și câmpul magnetic sunt perpendiculare pe direc-

BUJA SI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ția de propagare $\vec{n}_k$. Se va considera pentru intensitatea câmpului electric o variație spațio - temporală de forma $\vec{E} = \vec{E}_0 \, exp\left[-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right]$.

10. O undă EM ale cărei componente de câmp sunt $E = (E_x, E_y, E_z)$ și $B = (B_x, B_y, 0)$ se propagă pe direcția Oz a unui ghid de unde de secțiune rectangulară de lățime a și lungime b. Ghidul include aer prin pereții săi perfect conductori.



1.Să se arate că E_x, E_y, B_x, B_y se deduc din componenta E_z care se va lua de forma

$$E_z = E_{0z}(x,y)e^{i(k_g z - \omega t)},$$

k_g fiind modulul vectorului de undă prin ghid. Se va nota $k = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$.

2. Să se arate că ecuația de propagare a lui E_z este $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0$. Stabiliți o relație între k, k_g, k_c.

3.Să se determine $E_{oz}(x,y)$ presupunând că se poate folosi o soluție de forma

$E_{oz}(x, y)=f(x)\, g(y)$ (cu variabilele separabile).

Folosind $\frac{d^2 f}{dx^2} = -p^2 f$ și $\frac{d^2 g}{dy^2} = --q^2 g$,

a) să se stabilească relația între p^2, q^2, k_c^2;

b) să se deducă soluția generală pentru $E_z(x, y)$;

c) punând condiții la limite, să se arate că soluția capătă forma

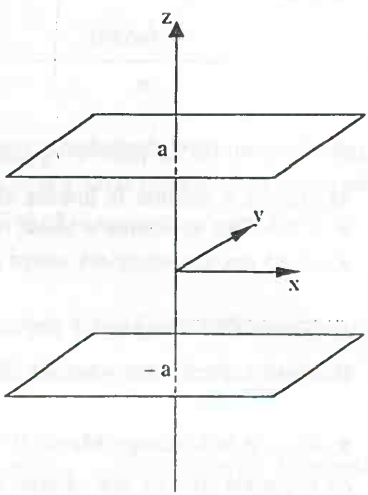
$$E_z = E_0 \sin\frac{m\pi}{a}x \, \sin\frac{n\pi}{b}y \, e^{i(k_g z - \omega t)} \quad cu\ m, n \in Z.$$

d) să se determine k_c în funcție de a, b, m, n.

4. Un „mod"este caracterizat de cuplul de valori m,n. Să se exprime componentele magnetică $\vec{B}$ și electrică, $\vec{E}$.

5.Să se determine vectorul Poynting apoi să se arate că doar componenta după Oz are o valoare medie nenulă.

11. Se consideră două plane conductoare situate la cotele $z = -a$ și $z = a$. Un câmp $\vec{E}$ polarizat rectiliniu după direcția Oy are forma: $E=(0, E_y, 0)$ cu $E_y = E_0 \cos\frac{\pi x}{2a} e^{i(kx - \omega t)}$.



1.Să se arate că un astfel de câmp satisface condițiile la

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

limită pe cele două plane conductoare, şi că $\nabla\vec{E}=0$.

2.Să se determine câmpul B corespunzător. Să se demonstreze că $\nabla\vec{B}=0$ şi condiţiile la graniţă sunt satisfăcute.

3.Să se stabilească relaţia de dispersie care leagă k şi ω. Să se arate că propagarea nu este posibilă decât dacă $\omega>\omega_0$ unde ω_0 este o pulsaţie care trebuie precizată.

4.Să se calculeze viteza de fază v_f şi viteza de grup v_g.

5.Care sunt componentele vectorului Poynting?

6.Să se arate că $\vec{E}$ se poate descompune în două unde plane reprezentate prin $\vec{E}_1$ şi $\vec{E}_2$ de vectori de undă $k_1=\left(k,0,\frac{\pi}{2a}\right)$ şi $k_2=\left(1,0,-\frac{\pi}{2a}\right)$. Să se precizeze direcţiile de propagare corespunzătoare.

12. Calculaţi valoarea medie $\left|\vec{\bar{Y}}\right|$ a vectorului Poynting pentru o undă electromagnetică plană $\vec{E}=\vec{E}_0\cos\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right)$care se propagă în vid.

13. Pornind de la relaţiile lui Fresnel să se arate că la suprafaţa de separare a două medii dielectrice are loc conservarea undei electromagnetice.

14. O undă electromagnetică plană cade pe o placă dielectrică plană de grosime d şi indice de refracţie n. Să se determine rapoartele dintre amplitudinile undelor reflectată şi incidentă şi respectiv refractată şi incidentă. Stabiliţi pentru ce valori ale grosimii d, reflexia undei nu se mai produce.

15. Calculaţi coeficienţii de reflexie şi de transmisie la suprafaţa de separare a două medii dielectrice pentru componentele câmpului electric, paralele cu planul de incidenţă, respectiv perpendiculare pe acesta, în funcţie de unghiurile de reflexie şi refracţie şi să se particularizeze pentru cazul incidenţei normale.

16. Stabiliţi dependenţa câmpului electric de variabilele spaţiu – timp,în cazul în care frecvenţele undelor plane pe care le suprapunem sunt cuprinse în intervalul $\left[\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2},\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right]$ în cadrul aproximaţiilor

$$E_0(\omega)=\begin{cases}E_0,\ dacă\ \omega\in\left[\omega_0-\dfrac{\Delta\omega}{2},\omega_0+\dfrac{\Delta\omega}{2}\right]\\ 0,\ în\ rest.\end{cases}$$ şi

$$k(\omega)=k(\omega_0)+(\omega-\omega_0)\left(\frac{dk}{d\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0}+\cdots\cong k_0+(\omega-\omega_0)\left(\frac{dk}{d\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_0}.$$

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

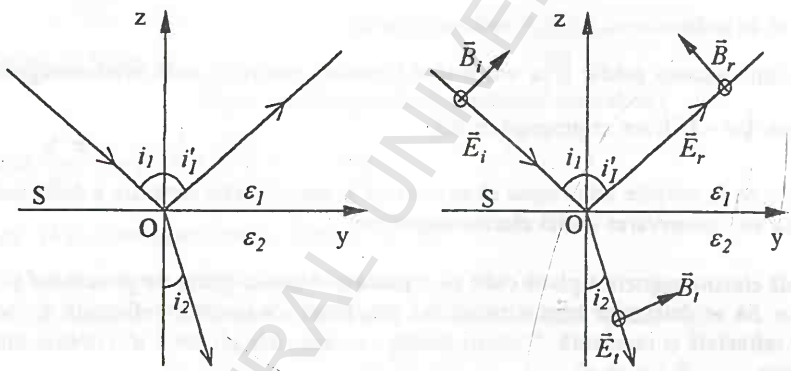
17. Calculați viteza cu care se deplasează configurația rezultată prin suprapunerea undelor " în domeniul $\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)$ cunoscută drept "pachet de unde" – viteza de deplasare a acestui pachet numindu-se "viteză de fază" – apoi stabiliți relația Rayleigh.

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

în care v_g este viteza de grup, v viteza de fază $v = \frac{\omega_0}{k_0}$, iar λ lungimea de undă, $\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$.

18. Arătați că pentru unghiuri de incidență α_i mai mari decât un anumit unghi limită α_l se produce reflexia totală dacă unda se reflectă pe un mediu cu indice de refracție mai mare decât cel al mediului din care provine. Calculați unghiul limită în cazul trecerii din sticlă în aer. Se cunoaște indicele de refracție al sticlei $n_s = 1,5$. Precizați expresia câmpului electric în mediul al doilea, pentru un câmp incident perpendicular pe planul de incidență.

19. Pe suprafața plană de separare a doi dielectrici cade pe direcția normală o undă electro -



magnetică plană. Să se scrie relațiile între intensitatea undei incidente și intensitățile undelor reflectată și refractată.

20. Prezentați un caz în care prin suprapunerea a două unde electromagnetice de aceeași frecvență, nu se obține interferența indiferent de diferența de fază dintre cele două unde.

21. Se propune să se calculeze coeficientul de reflexie și de transmisie a energiei la frontiera dintre două medii dielectrice perfecte, izotrope, omogene și indefinite de constante dielectrice ε_1 și ε_2 și permeabilități magnetice egale μ_0 separate printr-o suprafață plană fără distribuții de sarcină electrică și curenți.

O undă EM incidentă plană, monocromatică și de pulsație ω, $\vec{E}_i = \vec{E}_i^0 e^{j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ cade pe această suprafață la un unghi de incidență i_1.

1. Să se stabilească condițiile de trecere pe care le satisfac componentele vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ale undei EM.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. Se presupune că unda EM este polarizată rectiliniu şi câmpul electric incident $\vec{E}_i$ este normal pe planul de incidenţă.

a). Să se scrie condiţiile de trecere precedente într-un punct de abscisă z oarecare.

b). Să se deducă expresiile rapoartelor amplitudinilor $\frac{E_r}{E_i}$ şi $\frac{E_t}{E_i}$ în funcţie de unghiurile i_1 şi i_2, precum şi de indicii de refracţie $n_1 = c\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}$ şi $n_2 = c\sqrt{\varepsilon_2\mu_0}$.

c). Să se calculeze modulele vectorilor Poynting $(Y_r / Y_i)_\perp$ şi $(Y_t / Y_i)_\perp$ (indicele $\perp$ arată că vectorul câmp electric $\vec{E}$ este perpendicular pe planul de incidenţă). Să se deducă expresiile rapoartelor $\left(\frac{P_r}{P_i}\right)_\perp$ şi $\left(\frac{P_t}{P_i}\right)_\perp$ ale puterilor EM reflectate şi transmise faţă de puterea incidentă; aceste rapoarte se numesc coeficienţi de reflexie şi de transmisie a energiei.

d).Să se stabilească analog expresiile coeficienţilor de reflexie şi de transmisie $\left(\frac{P_r}{P_i}\right)_\parallel$ şi $\left(\frac{P_t}{P_i}\right)_\parallel$ când unda incidentă este polarizată rectiliniu şi când câmpul electric este conţinut în planul de incidenţă.

22. Caracterizaţi starea de polarizare a undelor descrise de ecuaţiile :

a) $E_y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$ $E_z = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$

b) $E_y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$ $E_z = -A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$

c) $E_y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$ $E_z = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - \frac{3\pi}{4}\right]$

23.

1) Precizaţi starea de polarizare a câmpului rezultat prin suprapunerea în $x=0$ a câmpurilor descrise de ecuaţiile:

a) $\vec{E}_1 = \vec{i}\cdot A_1 \cos 2\pi\nu t + \vec{j}\cdot B_1 \cos 2\pi\nu t$
$\vec{E}_2 = \vec{i}\cdot A_2 \cos 2\pi\nu t + \vec{j}\cdot B_2 \cos 2\pi\nu t$

b) $\vec{E}_1 = \vec{i}\cdot E_0 \cos\omega t + \vec{j}\cdot E_0 \sin\omega t$
$\vec{E}_2 = \vec{i}\cdot E_0 \cos(\omega t + \alpha) - \vec{j}\cdot E_0 \sin(\omega t + \alpha).$

2) Descompuneţi unda polarizată eliptic descrisă în punctul $x = 0$ de ecuaţia:

$$\vec{E} = \vec{i}\,A\sin\omega t + \vec{j}B\cos\omega t$$

într-o undă polarizată circular şi o undă polarizată liniar.

24. Lumina polarizată liniar cade pe suprafaţa unei lame de sticlă cu indicele de refracţie $n = 1{,}5$ sub un unghi de incidenţă de 60^0, iar vectorul electric din lumina incidentă face un unghi de 30^0 cu planul de incidenţă. Calculaţi procentul din lumina incidentă reflectat pe prima suprafaţă.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

25. O undă plană electromagnetică este polarizată eliptic. Semiaxele elipsei sunt *a* şi respectiv *b*. Care este grosimea unei lame cristaline care trebuie aşezată în calea undei şi cum trebuie orientată această lamă pentru a obţine o undă polarizată circular:

a) cu acelaş sens de rotaţie;

b) cu sens de rotaţie invers faţă de cel al elipsei;

Se vor considera axele de coordonate rotite cu $\frac{\pi}{4}$ faţă de axele elipsei.

26. Să se deducă expresiile gradului de polarizare în raport cu planul de incidenţă, al fascicu - lelor electromagnetice rezultate în urma incidenţei unui fascicul electromagnetic paralel pe suprafaţa de separare a doi dielectrici .

27. Se consideră un mediu dielectric omogen nemagnetic care are o permitivitate relativă de - pendentă de frecvenţă: $\varepsilon(\omega)$ poate fi eventual o mărime complexă. Se presupune că nu există distribuţie de sarcină electrică sau de curenţi liberi.

1).Să se scrie pentru câmpurile oscilante la pulsaţia relaţiile între $\vec{D}$, $\vec{E}$, ε_0 şi $\varepsilon(\omega)$. Să se scrie ecuaţiile Maxwell în acest mediu.Se va studia propagarea undei EM de tipul

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \text{ şi } \vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$\vec{k}$ fiind în acest caz o mărime complexă: $\vec{k} = \vec{k}' + j\vec{k}''$, $\vec{k}'$ şi $\vec{k}''$ fiind vectori reali.

2).Pe baza ecuaţiilor Maxwell să se arate că

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}_o \text{ şi } k^2 = \omega^2 \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2} \text{ iar } \vec{B}_0 = \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\vec{E}_0^2$$

3).Dacă $\varepsilon(\omega)$ este real să se calculeze viteza de fază v_φ a undei EM cunoscând relaţia între indicele de refracţie şi constanta dielectrică ale mediului. Se admite că această relaţie este valabilă şi în cazul în care $\varepsilon(\omega)$ este o mărime complexă, $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + j\varepsilon''(\omega)$, iar indicele de refracţie se va lua $n(\omega) = n'(\omega) + jn''(\omega)$. Se va studia cazul undei care se propagă de-a lungul axei Oz cu $\vec{k} = (0,0,k)$ presupunând că $\vec{E} = \left(\vec{E}_0 e^{j(kz-\omega t)},0,0\right)$.

4).Ce corespunde unei valori complexe a mărimii *k*? Să se scrie cu ajutorul lui $\vec{E}_0$ compo - nentele vectorului $\vec{B}$. Să se exprime *k* în raport cu ω, $n(\omega)$ şi *c*.

*28.*O undă electromagnetică având $H_y \neq 0$ şi pulsaţia ω traversează suprafaţa de separaţie între doi dielectrici. Permitivităţile electrice ale dielectricilor sunt de semn opus şi egale cu ε_1 şi $-|\varepsilon_2|$. Să se precizeze dependenţa vectorului de undă $\vec{k}$ de ω , ε_1 şi ε_2.

29. Pe suprafaţa apei cu indicele de refracţie $n = \frac{4}{3}$ se trimite un fascicul de lumină naturală. Calculaţi gradul de polarizare al luminii reflectate şi transmise, dacă:

1) incidenţa este brewsteriană;

2) incidenţa este normală.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

30. Un fascicul de lumină naturală, cade pe o lamă de sticlă cu indicele de refracție $n = 1,5$ %.

1) pentru ce valoare a unghiului de incidență lumina reflectată este liniar polarizată;

2) demonstrați că la incidență brewsteriană reflectanța $R_{II} = 0$.

31. Estimați cu ajutorul relațiilor Fresnel gradul de polarizare al luminii care parcurge sub inci dența brewsteriană un teanc de cinci plăci de sticlă cu indicele de refracție $n = 1,5$.

32. Un flux de lumină naturală cade sub unghiul Brewster pe suprafața unei stive din plăci de sticlă cu indicele de refracție $n = 1,5$. Prin parcurgerea plăcilor o parte din ce în ce mai mare a componentei perpendiculare pe planul de incidență a vectorului electric este eliminată prin reflexie, încât în cele din urmă se obține o polarizare completă a fasciculului incident. Calcu - lați numărul de plăci identice necesare pentru a obține o polarizare a fasciculului emergent de *90 %*.

33. Un fascicul de lumină circular polarizată, cade pe direcție normală pe o lamă sfert de un - dă.Precizați starea de polarizare a luminii emergente din lamă.Cum se modifică această stare de polarizare dacă grosimea lamei se reduce la jumătate?

34. Să se calculeze unghiul de incidență al luminii pe o lamă de sticlă cu indicele de refracție $n = 1,5$,dacă lumina reflectată ete polarizată;b)lumina incidentă este naturală;c)să se calculeze gradul de polarizare al luminii refractate pentru această incidență definit ca:

$$P = \frac{I_{II} - I_{\perp}}{I_{II} + I_{\perp}}.$$

35. Un fascicul de lumină parțial polarizată este analizat cu un nicol. Prin rotirea nicolului cu $60°$ față de poziția corespunzătoare intensității maxime, intensitatea fasciculului scade de două ori. Să se calculeze gradul de polarizare al fasciculului definit ca: $P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$.

36. Un fascicul de lumină polarizat liniar cade pe un cristal de spat de Islanda, astfel încât planul vibrațiilor face un unghi $\theta = 20°$ cu secțiunea principală a cristalului. Să se calculeze intensitățile relative ale celor două fascicule refractate și gradul de polarizare al radiației transmise.

37. Un fascicul de lumină polarizat liniar cade pe un cristal de calcit, astfel ca direcția vibra - țiilor face un unghi de $30°$ cu secțiunea principală a calcitului. Cele două fascicule refractate trec din nou printr-un nicol a cărui secțiune principală face unghiul de $60°$ cu planul vibrației incidente. Să se calculeze intensitățile relative ale celor două fascicule emergente și gradul de polarizare.

38. Cu doi nicoli montați ca polarizor și analizor, se observă succesiv două surse de lumină naturală. Se constată că intensitatea luminii ce iese din analizor este aceeași când unghiul dintre secțiunile principale ale nicolilor este $\theta_1 = 30°$ pentru prima sursă și $\theta_2 = 45°$ pentru cea de a doua sursă. Care este raportul intensităților inițiale $\frac{I_{01}}{I_{02}}$ ale celor două surse.

39. Se consideră o celulă electrică compusă din doi electrozi între care se află nitrobenzen. La aplicarea nitrobenzenului, se comportă ca un mediu anizotrop uniax cu axa optică pe direcția câmpului electric iar diferența indicilor de refracție este dată relația : $n_e = n_0 = k\lambda E^2$ unde λ este lungimea de undă a radiației în vid, iar k este o constantă care pentru nitrobenzen are

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

valoarea $k = 4\ 10^{-10}\ V^{-2}cm$. Celula Kerr este plasată între doi polarizori încrucișați a căror axă de transmisie face 45^0 cu direcția câmpului electric E.Știind că lungimea celulei este $l = 5$ cm să se calculeze fracțiunea din lumina incidentă care trece prin dispozitivul de mai sus. Se mai cunosc:distanța dintre electrozi de *7 mm*,tensiunea pe electrozi egală cu *10000 V* iar lungimea de undă $\lambda = 500nm$.

40. O undă de lumină naturală se trimite sub unghi Brewster pe suprafața unei lame din sticlă ($n = 1,54$) situată în aer. Calculați:

a) factorul de reflexie pe prima față;
b) gradul de polarizare al radiației refractate în sticlă;
c) gradul de polarizare al radiației care a străbătut lama de sticlă.

41. Calculați diferențele de fază φ_r și φ_t dintre undele incidentă și reflectată, respectiv incidentă și transmisă, în cazul incidenței normale a luminii pe suprafața de separare a unui metal. Se va ține seama că indicele de refracție al unui metal este de formă complexă $n' = n_r - i\alpha$ unde n_r este indicele de refracție real, iar α coeficientul de atenuare (indicele de extincție).

42. Unghiul limită de reflexie totală al unei substanțe este $l = 45^O$. Se cere :

1) valoarea unghiului Brewster pentru această substanță ;
2) arătați că în cazul reflexiei totale este satisfăcută legea conservării energiei.

43. O rază de lumină naturală este incidentă pe suprafața unei bucăți de sticlă cu indicele de refracție $n = 1,523$ sub un unghi de incidență de 70^0.

a). Calculați procentul din lumina incidentă care se regăsește în lumina reflectată.

b) .În raza reflectată care este raportul componentelor vectorului câmp electric $\vec{E}$ în planul de incidență și perpendicular pe planul de incidență.

44. Aerul începe să se ionizeze la o intensitate a câmpului electric de $E = 30\ kV/cm$. Să se calculeze intensitatea luminii în aer pentru care începe fenomenul de ionizare.

45. Să se calculeze adâncimea de pătrundere a undei electromagnetică plane în mediul al II-lea în cazul reflexiei totale pe suprafața de separare a două medii dielectrice.

46. Pornind de la formulele Fresnel

$$E_{11}^r = E_{11}^i \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} \quad ; \quad E_{\perp}^r = E_{\perp}^i \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}$$

$$E_{11}^t = E_{11}^i \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} \quad ; \quad E_{\perp}^r = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} E_{\perp}^i$$

să se deducă formulele :

$$E_{11}^r = E_{11}^i \frac{tg(\theta_i - \theta_t)}{tg(\theta_i + \theta_t)}; E_{11}^t = E_{11}^i \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_r)}$$

$$E_{\perp}^r = -E_{\perp}^i \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}; E_{\perp}^t = E_{\perp}^i \frac{2\sin\theta_t \cos\theta}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITAR / LIBRARY

47. Se consideră un dispozitiv de tip Young, pentru care se introduce funcția de coerență mutuală a undelor luminoase provenind de la cele două surse :

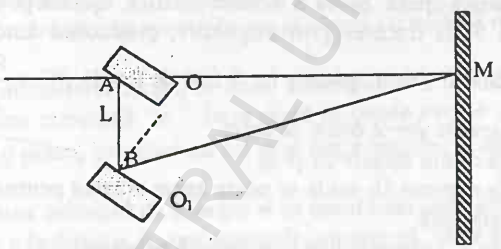
$$\gamma_{12}(\tau)=\frac{E_1(t+\tau)\cdot E_2^*(t)}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

în care $E(t)$ reprezintă câmpul electric al undelor a căror intensitate este proporțională cu $\overline{E^2(t)}$. Calculați :

a).Intensitatea undei electromagnetice în punctul S în funcție de $I_1 \approx \overline{E_1^2(t)}$, $I_2 \approx \overline{E_2^2(t)}$ și $\gamma_{12}(\tau)$,.În expresia mărimii $\gamma_{12}(\tau)$, $\tau=\tau_1-\tau_2$ unde $\tau_1=\frac{d_1}{c}, \tau_2=\frac{d_2}{c}$, d_1 și d_2 fiind depărtările surselor punctiforme S_1 și S_2 în raport cu punctul de observare M.

b).Intensitatea undei electromagnetice în funcție de modulul funcției de coerență $\gamma_{12}(\tau)$ și de defazajul dintre undele provenite de la cele două surse. Se consideră undele polarizate liniar.

48. Se consideră dispozitivul din figură în care O este o oglindă semitransparentă, iar O_1 se poate deplasa. Considerând radiația luminoasă emisă de sursa S ca fiind alcătuită dingrupuri de unde cu durata τ_c și știind că interferența apare numai prin suprapunerea undelor din același grup de unde , să se calculeze τ_c și numărul de oscilații pentru care câmpul rămâne coerent, știind că imaginea de interferență dispare dacă distanța L dintre cele două oglinzi este mai mare de *2,5 cm*, iar lungimea de undă a radiației emise de sursă este $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ *cm*.



49. Se consideră același dispozitiv experimental din problema anterioară însă în locul radiației monocromatice cu lungimea de undă λ se consideră o radiație cuasimonocromatică cu o lărgime de bandă $\Delta\lambda$.Interpretând dispariția imaginii de interferență ca datorându-se suprapunerii maximelor definite de λ cu minimile definite de $\lambda+\Delta\lambda$, calculați lărgimea de bandă $\Delta\lambda$ pentru $\lambda=550nm$.Lungimea L pentru care imaginea de interferență dispare are valoarea $L=2,5$ *cm*.

50. Franjele de interferență dispar începând cu o valoare minimă L a distanței de coerență. Estimați durata grupului de unde (timpul de coerență τ_c), în funcție de lărgimea liniei spectrale (lărgimea plajei de frecvențe a grupului de unde) și calculați timpul de coerență τ_c căruia îi corespunde $\Delta\lambda = 0,5nm$, pentru lungimea de undă $\lambda=500nm$.

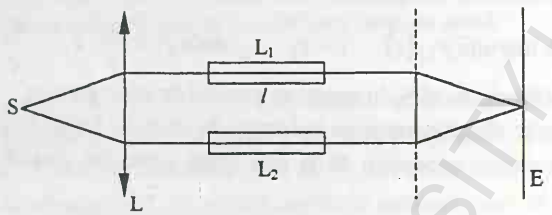
51. Se consideră un filtru de frecvențe care transmite radiația cu lungimea de undă de *500 nm* cu o lărgime de bandă de $\pm 0,5A$. În baza relației între timpul de coerență τ_c și lărgimea spectrală $\Delta\nu$ a radiației $\Delta\lambda \cdot \tau_c = 1$, estimați lungimea de coerență $L = c \cdot \tau_c$ a luminii transmise

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

prin acest filtru dacă pe acesta cade lumină albă.

52. Să se stabilească condiția necesară pentru ca prin suprapunerea a două unde electromagnetice de aceeași frecvență să nu se producă interferența indiferent de diferența de fază dintre cele două unde.

53. Dispozitivul din figură este folosit pentru determinarea indicelui de refracție la gaze. S



este o sursă de lumină monocromatică cu $\lambda=589,0nm.$,L_1 și L_2 două tuburi identice cu lungimea $l=10cm.$ în care se află aer ($n_a=1,000277$). Dacă în tubul L_1aerul este înlocuit cu amoniac,figura de interferență de pe ecranul E se deplasează cu $N=17$franje. Să se calculeze indicele de refracție al amoniacului.

54. Unul dintre dispozitivele clasice de interferență cu două unde (bilentilele lui Billet) se obține prin tăierea unei lentile subțiri de-a lungul unui diametru. Cele două jumătăți se depărtează și se lipesc cu o pastă opacă. Sursa S monocromatică, așezată pe axul optic va forma două imagini reale S_1 și S_2 la trecerea prin dispozitiv, producând fenomenul de interferență. Cunoscând distanța focală $f=40cm.$, poziția lui S față de lentilă $SO=\frac{9f}{5}$, $R=3cm.$, $\lambda=0,6\mu m$, iar distanța dintre semilentile $2a=1,6mm$, se cere:

1) distanța dintre sursele S_1 și S_2
2) distanța minimă D_0 unde se poate așeza ecranul pentru a putea prinde franjele de interferență;
3) lărgimea L a câmpului de interferență pe ecran;
4) pentru o distanță $D>D_0$ între lentile și ecran, să se determine valoarea interfranjei ($D=1,6m$);
5) în condițiile punctului 4) să se calculeze numărul de franje și valoarea lui L.

55. Calculați lărgimea liniei spectrale a unei surse laser, a cărei lungime de coerență este de *10 Km*, pentru o radiație cu lungimea de undă medie de *600 nm*. Precizați împrăștierea $\Delta\nu$ în frecvență.

56. O radiație având lungimea de undă $\lambda=600nm.$cade normal pe o rețea de difracție. Două maxime principale vecine apar respectiv la $\sin\theta=0,2$ și $\sin\theta=0,3$. Să se calculeze:

1) valoarea d a constantei rețelei
2) ordinul maxim al spectrului.

57. O radiație monocromatică cade pe o rețea de difracție cu lărgimea zonei transparente $a=0,4\cdot10^{-5}m$ și lățimea zonei opace $b=0,1\cdot10^{-5}m$. Să se calculeze:

1) lungimea de undă a radiației folosite știind că maximul de ordinul IV se formează sub un unghi $\theta=30°$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2) unghiul de dispersie pentru maximele de ordinul I în lumină albă, știind că $\lambda_{roșu}=0,75\cdot10^{-6}m$ și $\lambda_v=0,4\cdot10^{-6}m$.
3) ordinul maximului după care începe suprapunerea spectrelor de interferență.

58. Pe o rețea de difracție cu o lățime totală $l=2,5cm$ cade după direcția normală radiația de rezonanță a sodiului. Știind că dubletul galben al sodiului ($\lambda_1=589nm$ și $\lambda_2=589,6nm$) este rezolvat în spectrul de ordinul I, să se calculeze:
1) constanta d a rețelei ;
2) ordinul maxim al spectrului linia $\lambda_i=589nm$;
3) dispersia unghiulară a rețelei pentru linia $\lambda_i=589nm$.

59. Pe o rețea de difracție cade normal un fascicul de lumină monocromatică ($\lambda=630,0nm$) care se înregistrează în spectrul de ordinul $k=3$ sub unghiul de difracție $\theta=60°$. Se cere:
1) lungimea de undă a radiației λ' vizibilă sub același unghi în spectrul de ordinul $k'=4$;
2) care este numărul de trăsături n pe unitatea de lungime a rețelei;
3) care este dispersia unghiulară a rețelei pentru linia λ în spectrul de ordinul III.

60. Se consideră un fascicul de lumină albă care cade pe o rețea de difracție. Știind radiațiile extreme cu lungimile de undă $\lambda_r=700nm$ și $\lambda_v=400nm$ să se calculeze:
1) dacă este posibil ca maximul de ordinul 1 al radiației roșii să se suprapună peste maximul de ordinul 2 al radiației violet;
2) ordinele spectrelor ce se suprapun , pentru unghiul de difracție $\theta=30°$ și constanta rețelei.
3) ordinul maxim al spectrului ce se obține cu această rețea pentru λ_r și λ_v.

61. Să se calculeze intensitatea totală, în cazul interferenței a n fascicule luminoase coerente de aceeași amplitudine constantă *"a"*. Între două fascicule vecine există o diferență de fază constantă φ. Precizați pentru ce valori ale lui φ se obțin maxime și minime de interferență.

62. Calculați densitatea volumică de energie w în cazul unei unde electromagnetice plane care se propagă cu viteza v în direcția $\vec{n}$, într-un mediu anizotrop. Să se arate că w este proporțională cu pătratul indicelui de refracție absolut al mediului.

63. Un fascicul de lumină nepolarizat cade pe un polarizor a cărui axă optică face un unghi θ cu axa optică a analizorului. Care este intensitatea luminoasă ce cade pe o fotocelulă după ce a străbătut analizorul dacă atât analizorul cât și polarizorul absorb *10 %* din radiația incidentă pe ele. Calculați numeric pentru $\theta=60^0$.

64. Un fascicul de radiații paralel, liniar polarizat și cuasimonocromatic cu lungimea de undă $\lambda=589\ nm$ cade normal pe un cristal de calcit, pe o suprafață a cristalului paralelă cu axa optică.
1). Precizați lungimile de undă în cristal pentru razele ordinară și extraordinară;
2) .Precizați grosimile minime ale cristalului care induc diferențe de fază egale cu $\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$ sau π radiani.
3). Dacă vectorul câmp electric în lumina incidentă face un unghi de 45^0 cu axa optică, precizați starea de polarizare a luminii emergente în cele trei cazuri de la 2). Se cunosc pentru calcit indicii de refracție $n_0=1,658$ și $1,486$.

65. Se consideră o lamă cu fețe plan paralele care manifestă birefringență. Radiația polarizată liniar ce cade normal pe lamă astfel încât vectorul electric $\vec{E}$ oscilează de-a lungul unei axe privilegiate numită axă optică se propagă cu viteza v_e, în timp ce radiația al cărei vector electric oscilează perpendicular pe axa optică se propagă cu viteza v_0. Precizați ce grosime trebuie să aibă o astfel de lamă astfel ca la trecerea unei radiații liniar polarizate cu vectorul $\vec{E}$ ce face unghiul θ cu axa optică, radiația să devină:

a) liniar polarizată dar cu direcția de oscilație a vectorului $\vec{E}$ perpendiculară pe direcția inițială;

b) liniar polarizată cu aceași direcție de oscilație a lui $\vec{E}$;

c) circular polarizată dacă $\theta = 45^0$ sau eliptic polarizată pentru aceeași valoare a lui θ.

66. Calculați efectul unei lame semiundă și al uneia sfert de undă asupra unui :

a) fascicul de radiații polarizate liniar, cu planul de polarizare orientat la 45^0 față de axa optică a lamei;

b) fascicul de radiații polarizat circular .

67. Calculați intensitatea luminii emergente provenind dintr-o lamă sfert de undă plasată între un analizor și un polarizor încrucișați,ca funcție de unghiul θ dintre axa optică a polarizorului și axa optică a lamei. Se neglijează absorbția radiației în dispozitivele optice.Particularizați rezultatul pentru $\theta = 15^0$.

68.. Un fascicul de lumină nepolarizată de intensitate I_0 străbate un polarizor, o lamă birefrin - gentă și un analizor, în această ordine. Dacă polarizorii sunt dispuși perpendicular, iar lama birefringentă cu axa optică orientată la 45^0 față cea a polarizorului, calculați intensitatea lumi- nii transmise de succesiunea de dispozitive în cazurile :

a) lama birefringentă este o lamă semiundă;
b) lama birefringentă este o lamă sfert de undă;
c) în locul lamei birefringente se dispune un polarizor liniar.

69. Se consideră $2N + 2$ plăci anizotrope dispuse în straturi în contact. Fiecare placă are axa optică rotită cu unghiul $\frac{\pi}{4N}$ în raport cu cea anterioară. Prima și ultima placă sunt polarizori, iar celelalte plăci sunt lame semiundă. Calculați raportul între intensitatea luminii incidente și intensitatea luminii emergente.

70. Analizați starea de polarizare a luminii transmise de la o lamă sfert de undă când vectorul electric în lumină incidentă face un unghi de 60^0 cu axa optică.

71. Un fascicul de lumină polarizată liniar cade pe un cristal de Spat de Islanda , astfel încât planul vibrațiilor vectorului electric face unghi $\theta = 20^0$ cu secțiunea principală a cristalului. Să se calculeze intensitățile relative ale celor două fascicule refractate și gradul de polarizare al radiației transmise.

72. Un fascicul de lumină polarizat liniar cade pe un cristal de calcit, astfel că direcția vibrații- lor face un unghi de 30^0 cu secțiunea principală a calcitului. Cele două fascicule refractate trec din nou printr-un nicol a cărui secțiune principală face unghiul de 60^0 cu planul vibrației inci - dente.Calculați intensitățile relative ale celor două fascicule emergente și gradul de polarizare.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

73. La polarizarea luminii, prin reflexie pe o placă dielectrică, vectorul electric (luminos) îşi păstrează direcţia paralelă cu ea însăşi. Interferenţa dintre undele incidente şi reflectate poate da naştere la undele staţionareîntr-un strat de emulsie fotografică (cu maxime şi minime luminoase care se văd după developarea filmului fotografic) .Arătaţi că vectorul $\vec{E}$ vibrează după o direcţie perpendiculară pe planul de incidenţă.

74. Un fascicul de lumină naturală trece printr-un polarizor şi un analizor ale căror plane principale fac un unghi θ.Considerând că *10 %* din lumina incidentă pe fiecare dispozitiv este absorbită şi că intensitatea luminii ce părăseşte analizorul este egală cu *15 %* din intensitatea luminii incidente, calculaţi unghiul θ.

75. Se consideră trei polarizori A, B şi C polarizorul B fiind aşezat între A şi C aşa încât axa sa optică să formeze unghiul θ cu axa optică a polarizorului A. Dacă prin acest sistem trece o undă luminoasă naturală intrând prin polarizorul A,se cere să se calculeze intensitatea luminii transmise de polarizorul C dacă axa optică a acstuia face unghiul α cu axa optică a polarizorului A.Comentaţi rezultatele pentru valorile: $\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

76. Pe o lamă cristalină tăiată paralel cu axa optică cade sub incidenţa normală lumină polarizată circular. Lumina emergentă cade pe un analizor. Să se determine raportul între pătratul amplitudinii câmpului electric ce iese din analizor şi pătratul amplitudinii câmpului electric incident pe lamă, dacă planul principal al analizorului face un unghi α cu una din direcţiile principale ale lamei.Presupunând că lama introduce o diferenţă de fază de $\frac{\pi}{6}$ radiani,precizaţi pentru ce valori ale unghiului α pătratul amplitudinii câmpului electric ce iese din analizor are valoarea maximă şi pentru ce valori aceasta va fi minimă .

77. O undă plană electromagnetică polarizată liniar traversează o lamă cristalină.Una din direcţiile principale ale lamei face un unghi $i = 45^0$ cu planul principal al polarizorului. Diferenţa de fază introdusă de lamă este $\delta = 31^0$ ($sin\, 31^0 = 0.6$).Să se calculeze :
a). Raportul semiaxelor elipsei descrise de vectorul electric din unda emergentă polarizată eliptic;
b). Unghiul făcut de direcţiile principale ale lamei cu axele elipsei.

78. Un fascicul paralel de radiaţie optică, incident pe suprafaţa unui material optic, este total polarizat în reflexie.Determinaţi valoarea unghiului dintre direcţia fasciculului reflectat şi direcţia fasciculului refractat, ştiind că materialul optic este transparent,omogen şi izotrop.

79. Care este unghiul dintre planele principale ale unui polarizor şi unui analizor dacă intensitatea luminii naturale după trecerea prin polarizor şi analizor se reduce la un sfert din valoarea iniţială. Se neglijează absorbţia luminii.

I. 6 RELATIVITATE RESTRÂNSĂ

1. Dacă definim $\sigma^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2$ atunci σ se numeşte ***cuadriintervalul spaţiu-timp***.Să se arate că durata proprie diferenţială $d\tau_0$ satisface relaţia $d\tau_0 = \frac{d}{I_c}$ fiind deci un invariant relativist.

2. O particulă se mişcă în planul x'Oy'cu o viteză v' care face unghiul φ' cu axa Oy. Sistemul x'Oy' se mişcă cu o viteză relativă v_0 de-a lungul axei x în sistemul xOy. Să se calculeze unghiul pe care-l face viteza particulei cu una din axele sistemului xOy.

3. Să se calculeze densitatea unui corp care se mişcă cu o viteză $v \approx c\,(v=0,9\,c)$ dacă în sistemul propriu el are densitatea ρ_0.

4..Dacă definim cuadrivectorul impuls-energie prin coliniaritate cu cuadriviteza, să se găsească relaţiile de transformare reciprocă a componentelor cuadriimpulsului exprimate în două referenţiale S şi S', unde S' se mişcă cu viteza v_0 de-a lungul direcţiei Ox.

5. O particulă cu masa de repaus m_{01} şi impuls vectorial p_1 ciocneşte o particulă cu masa m_{02} aflată în repaus în sistemul laboratorului.Dacă notăm cu p_1' şi p_2' impulsurile vectoriale ale particulelor după ciocnire cele trei impulsuri p, p_1' şi p_2' formează un triunghi de „bază fixă" p şi vârf „mobil". Să se afle locul geometric al vârfului acestui triunghi.

6. O particulă de masă de repaus m_0 şi impulsul vectorial p ciocneşte o particulă identică aflată în repaus în sistemul laboratorului. Să se determine unghiul minim dintre direcţiile celor două particule după ciocnire.

7. O particulă cu masa de repaus m_{01} şi energia E_1 ciocneşte o altă particulă cu masa de repaus m_{02} aflată în repaus în sistemul laboratorului. Să se determine energia E_2 a celei de-a doua particule dacă direcţia ei de mişcare după ciocnire face unghiul θ_2 cu direcţia de mişcare a primei particule înainte de ciocnire.

8. Să se determine masa de repaus a unei particule formate prin ciocnirea neelastică a unei particule având masa de mişcare m_{01} şi impuls vectorial p_1 cu o altă particulă de masă de repaus m_{02} aflată în repaus în sistemul laboratorului.

9. O particulă cu masa de repaus m_0 se dezintegrează spontan în două particule cu masele de repaus m_{01} şi respectiv m_{02}. Să se determine energiile E_1 şi E_2 ale particulelor astfel formate.

10. O particulă cu energia E' se mişcă într-un sistem mobil bidimensional x'Oz' cu o viteză $\vec{v}'$ care face unghiul θ' cu axa Oz'. Să se determine energia acestei particule notată cu E în sistemul S faţă de care S' se mişcă cu viteza $\vec{v}_0$ de-a lungul axei Oz şi unghiul θ pe care-l face viteza $\vec{v}$ cu axa Oz în sistemul fix S.

11. Să se determine componentele cvadrivectorului acceleraţie faţă de sistemul propriu instantaneu S_0 al unei particule dacă faţă de sistemul S particula se mişcă cu o viteză vectorială $v = v(t)$ presupunând că dependenţa lui $\vec{v}(t)$ este realizată prin intermediul variaţiei modulului

acesteia.

12. Să se determine componentele cuadrivectorului accelerație la fel ca la problema precedentă cu specificarea faptului că acum variația vitezei se face numai ca direcție.

13. O particulă cu masa de repaus m_0 se mișcă sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$ și atinge viteza $\vec{v}$. Să se scrie accelerația acestei particule relativiste ca funcție de forță și viteză.

14. Să se deducă raportul între forță și accelerație în cazul relativist dacă forța este coliniară cu viteza particulei.

15. Să se determine masa „transversală" a unei particule relativiste ce se manifestă când forța este perpendiculară pe viteză.

16. O particulă cu masa de repaus m_0 pleacă din repaus sub acțiunea unei forțe constante F care acționează un timp t suficient de lung.Să se exprime viteza și spațiul dobândite de această particulă după intervalul de timp t.

*17.*O particulă cu masa de repaus m_0 se mișcă cu o accelerație a_0 constantă în sistemul de referință propriu. Să se determine viteza și spațiul parcurs în sistemul laboratorului după un interval de timp t suficient de lung măsurat în sistemul laboratorului.

18. Folosindu-se rezultatul problemei precedente să se explice ***paradoxul gemenilor*** : „Pără - sind Pământul, călătorul spațial care se mișcă cu o accelerație constantă se vede mai tânăr ca geamănul său terestru".

19. O particulă relativistă cu masa de repaus m_0 și sarcina q se mișcă cu viteza $v \sim c$ într-un câmp omogen de inducție magnetică B. Să se determine raza R a cercului lorentzian pe care această particulă îl descrie.

20. O particulă relativistă cu masa de repaus m_0 și sarcină q se mișcă într-un câmp electric omogen E orientat de-a lungul axei Ox.Să se determine ecuația de mișcare pentru o asemenea particulă dacă „intrarea" particulei în câmp s-a făcut după o direcție arbitrară având energia inițială E_0.

21. Să se determine energia cinetică, viteza și impulsul unei particule relativiste de masă m (masa de repaus este m_0).

22. Stabiliți relațiile de transformare a densității de curent și de sarcină la trecerea de la referențialul inerțial fix S la referențialul inerțial mobil S'.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

23. Să se stabilească componentele cuadrivectorului densitate curent-sarcină şi să se precizeze transformarea componentelor sale la trecerea de la un referenţial la altul.

24. Stabiliţi forma cuadridimensională a legilor circuitului magnetic şi fluxului electric.

II - SOLUŢII, INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

II.1 ANALIZĂ DIMENSIONALĂ

1.

a) lucrul mecanic, energia, căldura, momentul forţei;
b) presiunea, densitatea volumică de energie;
c) capacitatea calorică, entropia;
d) căldura specifică, entropia unităţii de masă.

*

2.

a) $v=\Delta S/\Delta t$; $[v]=LT^{-1}$; $a=\Delta v/\Delta t$; $[a]=LT^{-2}$
b) $F=m\cdot a$; $[F]=MLT^{-2}$
c) $L=F\cdot d$; $[L]=ML^2T^{-2}$
d) $P=L/t$; $[P]=ML^2T^{-3}$
e) $F=k\cdot(m_1m_2/r^2)$; $[k]=MLT^{-2}L^2/M^2=M^{-1}L^3T^{-2}$
f) $p=F/A$; $[p]=ML^{-1}T^{-2}=[E]$.
g) $\rho=m/V$; $[\rho]=ML^{-3}$

*

3.

a) Căldura Q are aceeaşi formulă dimensională ca şi lucrul mecanic L;$[Q]=ML^2T^{-2}$
b) $c=Q/m\cdot\Delta t$; $[c]=L^2T^{-2}t^{-1}$.
c) Energia medie de translaţie a moleculelor unui gaz perfect este: $E=(3/2)\cdot k\,T$; $[k]=ML^2T^{-2}t^{-1}$
d) $pV=\nu RT$; $[R]=L^2MT^{-2}mol^{-1}t^{-1}$

*

4.

a) $q=It$; $[q]=IT$;
b) Din legea lui Coulomb $F=(1/4\pi\varepsilon)\cdot(q_1q_2/r^2)$; $[\varepsilon]=I^2T^4M^{-1}L^{-3}$
c) Din formula de definiţie: $E=F/q$ rezultă $[E]=I^{-1}MLT^{-3}$
d) Din formula $\varphi=L/q$ se obţine $[\varphi]=ML^2T^{-3}I^{-1}$
e) Capacitatea electrică se exprimă prin formula: $C=q/U$; $[C]=I^{-2}T^4M^{-1}L^{-2}$
f) Din legea lui Ohm $R=U/I$; $[R]=ML^2I^{-2}T^{-3}$
g) Din expresia forţei electromagnetice $F=BIl$, se obţine $[B]=MI^{-1}T^{-2}$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

h) $[H]=IL^{-1}$

i) Din formula de definiție a fluxului magnetic $\phi=BS$ se obține

$$[\phi]=ML^2I^{-1}T^{-2}$$

j) Din expresia fluxului magnetic al unei bobine $\phi=LI$, se obține $[L]=ML^2I^{-2}T^{-2}$

k) $B=\mu H$; $[\mu]=MI^{-2}T^{-2}L$.

*

5. $MLT^{-2}=M^x\omega^y R^{2x}=M^x L^z T^{-y}$; $x=1$; $y=2$; $z=1$; $F=Cm\omega^2 R$; $C=1$.

*

6. $LT^{-1}=F^x m^y l^z=M^x L^x T^{2x} M^x L^z$;
$x+y=0$; $x+z=1$; $2x=1$; $x=1/2$; $y=-1/2$; $z=1/2$; $v=C(F\cdot l/m)^{1/2}$.

*

7. $[v_t]=T^{-1}=E^x l^y \rho^z$; $x=1/2$; $y=-1$; $z=-1/2$; $v_t=C/l(E/\rho)^{1/2}$

*

8. $[k]=ML^{-2}$; $[g]=LT^{-2}$; $T=C_1(m/k)^{1/2}$; $T=C_2(l/g)^{1/2}$; $C_1=C_2=2\pi$.

*

9. Se ajunge la formula lui Newton $R=C\rho v^2 S$.

*

10. $[R]=ML^2T^{-2}v^{-1}\theta^{-1}$; $<R>_{SI}=J/mol\cdot K$.

*

11. $[\gamma]=M^{-1}L^3T^{-2}$.

*

12. $r=v^x m^y q^z B^u$; $x=1$; $y=1$; $z=-1$; $u=-1$; $r=Cmv/qB$; $C=1$.

*

13. $[L]=[\phi]/[I]=[B][S]/[I]=L^2MT^{-2}I^{-2}$; $E=CL^x I^\beta$; $x=1$; $y=2$; $E=CLI^2$;teoretic se obține $C=1/2$; $E=LI^2/2$.

*

14. Ținând seama de rezultatele problemei *2*, avem:

$$LT^{-1}=(ML^{-1}T^{-2})^\alpha\cdot(ML^{-3})^\beta=M^{\alpha+\beta}L^{-\alpha-3\beta}T^{-2\alpha}$$

de unde, $\alpha+\beta=0$; $-\alpha-3\beta=1$; $-2\alpha=-1$. Se obține: $\alpha=1/2$; $\beta=-1/2$. Obținem astfel $v=C\cdot(E/\rho)^{1/2}$. Calculele teoretice conduc la valoarea $C=1$.

*

15. $c=K\varepsilon_0^\alpha\mu_0^\beta$ Folosind rezultatele problemei *4*, obținem:

$$LT^{-1}=(I^2T^4M^{-1}L^{-3})^\alpha(MI^{-2}T^{-2}L)^\beta=I^{2\alpha-2\beta}T^{4\alpha-2\beta}M^{-\alpha+\beta}L^{-3\alpha+\beta}$$

de unde rezultă sistemul: $2\alpha-2\beta=0$; $4\alpha-2\beta=-1$; $-\alpha+\beta=0$; $-3\alpha+\beta=1$. Se obține $\alpha=\beta=-1/2$.
Deci $c=K\cdot[1/(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}]$. Calculele teoretice conduc la valoarea $K=1$.

*

16. $E_c=Kq^\alpha C^\beta$. Ținând seama de rezultatele problemelor *2* și *4*, avem :
$ML^2T^{-2}=(IT)^\alpha(I^2T^4M^{-1}L^{-2})^\beta=I^{\alpha-2\beta}T^{\alpha+4\beta}M^{-\beta}L^{-2\beta}$.
Rezultă sistemul de ecuații $\alpha-2\beta=0$; $\alpha+4\beta=-2$; $-\beta=1-2\beta=2$. Rezolvând sistemul obținem $\beta=-1$; $\alpha=2$. Deci: $E_c=K(q^2/C)$. Calculele teoretice conduc la valoarea $K=1/2$. Deci, $E_c=q^2/2C$.

*

17. $w=K\varepsilon_0^\alpha E^\beta$. Folosind rezultatele problemelor *2* și *4*, avem:

$$ML^{-1}T^{-2}=(I^2T^4M^{-1}L^{-3})^\alpha(I^{-1}MLT^{-3})^\beta=I^{2\alpha-\beta}T^{4\alpha-3\beta}M^{-\alpha+\beta}L^{-3\alpha+\beta}$$

Se obține sistemul de ecuații: $2\alpha-\beta=0$; $4\alpha-3\beta=-2$; $-\alpha+\beta=1$; $-3\alpha+\beta=-1$.
Rezolvând sistemul obținem $\alpha=1$; $\beta=2$; Deci: $w=K\varepsilon_0 E^2$. Calculele teoretice dau $K=1/2$, deci $w=\varepsilon_0 E^2/2$.

*

BCU "AL. I. CUZA" IAȘI UNIVERSITY LIBRARY

18

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2;\ \rho_2 = \rho_1 h_1 / h_2 = 13600\ kg/m^3;\ \Delta\left(\frac{h_1}{h_2}\right) = \frac{h_1}{h_2}\left(\frac{\Delta h}{h_1} + \frac{\Delta h}{h_2}\right) = 2{,}9.$$

$\Delta\rho_2 = \rho_1 \Delta(h_1/h_2) = 2900\ kg/m^3;\ \rho_2 = (13600 \pm 2900)\ kg/m^3;\ \delta\rho_2 = \Delta\rho_2/\rho_2 = 0{,}215;\ \delta\rho_2 \approx 20\%.$

*

19.

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 500}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}3261 \cdot 10^7\ m/s;\ x = 2eU/m;\ \Delta v = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x;$$

$$\Delta x = \frac{2e\Delta U}{m};\ \Delta x = 0{,}7 \cdot 10^{12};\ \Delta v = 2{,}63 \cdot 10^4;\ v = (1{,}3261 \pm 0{,}0026) \cdot 10^7\ m/s;$$

$\delta v = \Delta v / v \approx 2 \cdot 10^{-3};\ \delta v \approx 0{,}2\%.$

*

20.

a) $R_s = R_1 + R_2 = 500\ \Omega;\ \Delta R_s = \Delta R_1 + \Delta R_2 = 5\ \Omega;\ R_s = (500 \pm 5)\ \Omega;\ \delta R_s = 10^{-2}.$

b) $R_p = R_1 R_2/(R_1 + R_2) = 105\ \Omega;\ \Delta(R_1 R_2) = R_1 \Delta R_2 + R_2 \Delta R_1 = 1150\ \Omega;$
$\delta(R_1 R_2) = \Delta(R_1 R_2)/R_1 R_2 = 0{,}0219;\ \delta R_p = \delta(R_1 R_2) + \delta(R_1 + R_2) = 0{,}0319;$
$\Delta R_p = R_p \Delta R_p = 3{,}35\ \Omega;\ R_p = (105{,}00 \pm 3{,}35)\ \Omega.$

*

21.

$\Delta c = 4 \cdot 10^3\ m/s;\ \Delta v = 4 \cdot 10^{-4}\ m/s;\ \delta c = 1{,}33 \cdot 10^{-5};\ \delta v = 1{,}21 \cdot 10^{-4};$
Preciziile de măsurare sunt: $P_c = 1/\delta c \approx 75000;\ P_v = 1/\delta v \approx 8300.$

*

22.

$\delta_1 = \Delta d/d_1 = 0{,}01;\ \delta_1 = 1\%;\ P_1 = 1/\delta_1 = 100;\ \delta_2 = \Delta d/d_2 = 0{,}01;\ \delta_2 = 0{,}2\%;\ P_2 = 1/\delta_2 = 500;$
$\delta_3 = \Delta d/d_3 = 0{,}001;\ \delta_3 = 0{,}1\%;\ P_3 = 1/\delta_3 = 1000.$ Rezultă că precizia este cu atât mai mare, cu cât dimensiunea măsurată este mai mare. Erorile ce afectează căldura specifică c a apei se neglijează.

*

23

a) $C = Mc + mc\dfrac{t - t_1}{t - t_0}$;

b) $\delta C = \dfrac{\Delta m}{m} + \dfrac{\Delta M}{M} + \dfrac{\Delta t}{t - t_0} + \dfrac{\Delta t}{t - t_0} + \dfrac{(t_1 - t_0)\Delta t}{(t - t_0)(t - t_1)}$;

c) $\Delta C = C\delta C.$

*

24.

$$\Delta(\ell - \ell_b) = \Delta\ell + \Delta\ell = 2\Delta\ell;\ \Delta(t - t_0) = \Delta t + \Delta t = 2\Delta t;$$

$$\Delta\alpha = \frac{1}{\ell_0}\frac{\ell - \ell_0}{t - t_0}\left[\frac{2\Delta\ell}{\ell - \ell_0} + \frac{2\Delta t}{t - t_0} + \frac{\ell_0 \Delta\ell}{\ell_0^2}\right]$$

Deoarece ultimul termen este mic și poate fi neglijat, avem:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{\ell_0}\frac{\ell - \ell_0}{t - t_0}\left[\frac{2\Delta\ell}{\ell - \ell_0} + \frac{2\Delta t}{t - t_0}\right];\ \Delta\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{2\Delta\ell}{\ell - \ell_0} + \frac{2\Delta t}{t - t_0}.$$

*

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

25.

$$\Delta m = \Delta E/c^2 \; ; \delta m = \frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta E}{mc^2} = \frac{1{,}41 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 9 \cdot 10^{16}} \cong 0{,}156 \cdot 10^{-8} \; ; P = \frac{1}{\delta m} \cong 6 \cdot 10^{8}.$$

*

26.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 36{,}06; \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0{,}26; x = 36{,}06 \pm 0{,}26.$$

*

27.

$$\bar{R} = \sigma \bar{S} \bar{T}^4 = 8{,}9788 J/s; \; \sigma_R^2 = (\sigma \bar{T}^4)^2 \sigma_s^2 + (4\sigma \bar{S} \bar{T}^3)^2 \sigma_T^2 = 2{,}3 \cdot 10^{-4} + 16{,}9 \cdot 10^{-4}.$$

*

II.2 TERMODINAMICĂ

*1.*Pentru ca dF să fie diferențială totală exactă este necesar și suficient ca derivatele mixte de ordinul al doilea să nu depindă de ordinea derivării, ceeace presupune egalitățile

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{z,x} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{y,z} ; \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_{x,y} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{z,x} ; \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_{y,z} = \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_{x,y}.$$

Notând $\vec{R} = \vec{R}(x,y,z)$ se obține că $(\nabla \times \vec{R})_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0$

și încă două relații de acest gen care conduc la $\nabla \times \vec{R} = 0$ .Aplicând teorema lui Stokes,

$$\oint \vec{R} d\vec{\ell} = \iint \nabla \times \vec{R} \cdot d\vec{S} = 0$$

în care

$$\vec{R} d\vec{\ell} = XdX + YdY + ZdZ = dF$$

adică, $\oint dF = 0$ relație care conferă funcției F calitatea de ***funcție de stare***.

*

*2a).*Dacă forma df este diferențială totală exactă, $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy = Xdx + Ydy$

în care $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_y$,din care rezultă egalitatea cerută.

*2b).*Scriem ecuația Pfaff corespunzătoare formei df $Xdx + Ydy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{X}{Y}$ Acestă ecuație, în condițiile problemei are întotdeauna soluție. Fie aceasta, $F(x,y)=const$.Avem :

$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x dy = 0$ .Se obține: $\frac{1}{X}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{Y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = g(x,y)$din care, rezultă

: $dF = gXdx + gYdy = gdF$ adică g este un ***factor integrant*** al formei df care în acest mod se dovedește a fi olonomă.

*

*3.*Se calculează pentru fiecare derivatele mixte de ordinul al doilea și se compară.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

De exemplu: $\frac{\partial f_3}{\partial x} = x - y \Rightarrow \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} = -1 \frac{\partial f_3}{\partial y} = x + y \Rightarrow \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} = 1$ .Rezultă că df_3 nu este diferențială totală exactă. Analog, se obține : $\frac{\partial^2 f_5}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_5}{\partial y \partial x} = 2xy$ și se constată că df_5 este o diferențială totală exactă a funcției $f_5(x,y) \equiv \frac{x^2 y^2}{2}$ ca și df_1 și df_6 ce provin din funcțiile $f_1(x,y)$ și respectiv $f_6(x,y) \equiv \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}$.

*

4. Fie (p_1,V_1), (p_2,V_2) și (p_3,V_3) parametrii de stare a trei sisteme aflate în echilibru termic, pe care le notăm cu 1,2 și 3. Vom accepta notația folosită în curs pentru echilibrul termic și anume simbolul E. Din 1E3 rezultă că există o funcție f_1 care corelează parametrii acestor sisteme $f_1(p_1,V_1,p_3,V_3) = 0$.Din acestă relație se poate explicita p_3 : $p_3 = g_1(p_1,V_1,V_3)$. Analog din 2 E 3, $p_3 = g_2(p_2,V_2,V_3)$rezultă $g_1(p_1,V_1,V_3) = g_2(p_2,V_2,V_3)$.Cum 1E 2 se obține că $g_1(p_1,V_1) = g_2(p_2,V_2)$.Introducând pentru g_1 și g_2 notațiile θ_1 și θ_2

$$\theta_1 = g_1(p_1,V_1) \text{ și } \theta_2 = g_2(p_2,V_2)$$

rezultă scrierea condiției de echilibru termic între sistemele 1 și 2 : $\theta_1 = \theta_2$ .Mărimea θ introdusă în acest mod definește astfel ***temperatura empirică***.

*

5. Aplicăm relația (2.16) sub forma :

$$\theta = \theta \frac{\theta}{\theta_0'} = 273,15 \cdot \frac{485,375}{682,9} = 192,15 \; ; \quad 192,15 - 273,15 = -81^0\,C$$

*

6 . Considerăm ecuația termică de stare $A = A(T,a)$.Diferențiind această ecuație, obținem:

$$dA = \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_T da + \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_a dT$$

care pentru A=const. devine

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A + \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_a = 0$$

din care, rezultă:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A = -1$$

Particularizând acestă ecuație pentru $A = p$ și $a = V$, se obține

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -1$$

și ținând seama de relațiile de definiție ale coeficienților α, β și K_γ se stabilește relația .

$$\alpha = p \beta K_\gamma$$

*

7. Se ține seama de ***ecuația Van der Waals*** $p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{a}{V^2}$ și de relația evidentă

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1$$

Pentru ***gazul Van der Waals*** se obțin expresiile:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\alpha = \frac{\nu R}{\frac{\nu RTV}{V-\nu b} - \frac{2\nu^2 a(V-\nu b)}{V^2}}$$

$$K_\gamma = \frac{1}{p}\cdot\frac{\nu R}{V-\nu b} = \frac{1}{p}\frac{p+\nu^2\frac{a}{V^2}}{T} = \frac{1}{T}\left(1+\nu^2\frac{a}{pV^2}\right) \text{ şi}$$

$$\beta = \frac{1}{\frac{\nu RTV}{(V-\nu b)^2} - \frac{2a\nu^2}{V^2}}$$

iar *pentru gazul ideal*, pornind de la ecuaţia termică $p = \frac{\nu RT}{V}$ se obţin expresiile

$$\alpha = \frac{1}{T}\ ;\ K_\gamma = \frac{1}{T} \text{ şi } \beta = \frac{1}{p}$$

*

8. Postulatul al doilea arată că la echilibrul termodinamic a două subsisteme, caracterizate de parametrii a_1 , T_1 , a_2 ,T_2 energiile lor interne, vor fi

$$U_1 = U1\,(a_1\,,\ T_1\,) \quad şi \quad U_2 = U_2\,(a_2\,,\ T_2\,) \qquad (1)$$

Unicitatea distribuţiei energiei sistemului este echivalentă cu faptul că în cazul parametrilor a_2, T_2 , a_1 fixaţi, ecuaţia (1) are soluţia $U_1 = U_1\,(T_1)$ unică ce exprimă o monotonie a funcţiei $T_1 = T_1\,(\,U_1\,)$. Acestă monotonie se regăseşte şi în părţile subsistemului care manifestă aceeaşi comportare energetică ca a sistemului global, în sensul că energiile părţilor sistemului cresc simultan când creşte energia sa totală de unde rezultă că variabilele T_1 , T_2 , T_3 , ... sunt simultan funcţii monoton crescătoare de variabileleU$_1$,U_2, U_3 , ... sau monoton descrescătoare. Alegând transformarea convenabilă pentru ca acestea să fie funcţii monoton crescătoare se pot alege funcţiile de temperatură $T=T(a,U)$ monoton crescătoare cu variaţiile lui U. Într-o astfel de alegere a funcţiilor de temperatură, derivata $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_a$ este întotdeauna pozitivă.

*

9. În baza relaţiei între coeficienţii termodinamici $\alpha = K_\gamma \cdot \beta \cdot p$,obţinem

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial \ln V}{\partial T}\right)_p = f(T) \text{ şi}$$

$$\beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial \ln V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p}$$

Rezultă, $d\ln V = f(T)dT - \frac{1}{p}dp$ sau prin integrare, $\ln V = \int f(T)dT - \ln p + const.$ Alegem valoarea constantei egală cu $\ln \nu R$ şi pentru $f(T) = \frac{1}{T}$ .Se obţine $\ln pV = \ln \nu RT$ sau $pV = \nu RT$.

*

10. Ecuaţia de stare presupune $V=V(T,p)$. Prin diferenţiere, se obţine:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp = \alpha V dT - \beta V dp = (V-a)\frac{dT}{T} - \frac{3(V-a)}{4p}dp$$

din care rezultă $\frac{dV}{V-a} = \frac{dT}{T} - \frac{3}{4}\frac{dp}{p}$ sau, prin integrare $\ln(V-a) = \ln T + \ln p^{-\frac{3}{4}} + const.$

echivalentă, cu ecuaţia: $p^{\frac{3}{4}}(V-a) = const.\cdot T$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

11. Se pot scrie relațiile : $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)^{-1} = \frac{V-b}{\nu R}$; $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = -\frac{V-b}{\nu R}\left[-\frac{\nu RT}{(V-b)^2}+\frac{2a}{V^3}\right]$

Ultima egalitate, a ținut seama de relația $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1$ .Ecuația de stare presupune ca $p=p(T,V)$ care prin diferențiere conduce, la

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV = \left(\frac{\nu R}{V-b}\right)dT + \left[-\frac{\nu RT}{(V-b)^2}+\frac{2a}{V^3}\right]dV$$

Se obține prin integrare, ecuația Van der Waals.

*

12. Din expresia primului principiu,

$$dQ = dU + pdV = \nu C_V dT + pdV = \nu C_V \frac{d(pV)}{\nu R} + pdV =$$

$$= \frac{C_V}{R}(pdV + Vdp) + pdV = \frac{C_V}{R}Vdp + \frac{C_V + R}{R}pdV = 0$$

S-a folosit ecuația termică de stare $pV = \nu RT$ și proprietatea ce caracterizează transformarea adiabatică, $dQ = 0$.Ținând seama de relația lui Mayer $C_p = C_V + R$ și că $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, se obține:

$$\gamma \cdot p \cdot dV + V \cdot dp = 0$$

care după separarea variabilelor conduce prin integrare la $\ln pV^\gamma = const.$,echivalentă cu $pV^\gamma = const$. Cuplată cu ecuația termică de stare, această ecuație este echivalentă cu alte două ecuații: $TV^{\gamma-1} = const.$ și $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const.$

*

13. a) Pentru un sistem termodinamic simplu, ecuațiile (2.48) – (2.51) se particularizează:

$$\lambda_a = A + \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_T \qquad (1)$$

$$CdT = \lambda_a da + C_a dT \qquad (2)$$

$$C = C_a + \lambda_a \frac{da}{dT} \qquad (3)$$

$$C_A = C_a + \lambda_a \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A \qquad (4)$$

Ecuațiile (3) și (4) se scriu sub forma : $C_a - C = -\lambda_a \frac{da}{dT}$; $C_A - C_a = \lambda_a \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A$.

Prin eliminarea căldurii latente la parametrii externi constanți C_a se obține ecuația politropei

$$\frac{C_A - C_a}{C_a - C}\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da + dT = 0 \qquad (5)$$

b) Considerăm $T=T(A,a)$ și obținem: $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a dA + \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da$ .Introducând în ecuația (5) ecuația capătă forma : $\frac{C_A - C}{C_a - C}\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da + \left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a dA = 0$. Cum în transformarea adiabatică $C=0$ și $\left(\frac{C_A}{C_a}\right) = \gamma$, rezultă ecuația adiabatei: $\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a dA + \gamma\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da = 0$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

14. Vom folosi ecuația (2.49) scrisă pentru un sistem termodinamic simplu:

$$dQ = CdT = C_a dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_T + A\right]$$

care pentru un proces adiabatic, devine :

$$C_a dT_S + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_T + A\right] da = 0$$

în care s-a înlocuit T cu T_s pentru a marca faptul că, pe adiabată, entropia este constantă. Ultima ecuație va descrie în același timp și un proces izoterm ($dT_s=0$) dacă pentru variații da arbitrare, este îndeplinită condiția $\dfrac{\left(\dfrac{\partial U}{\partial a}\right)_T + A}{C_a} = 0$. Dacă această condiție nu este satisfăcută, temperatura în procesul adiabatic va varia în permanență ($dT_s\neq 0$), iar schimbul de căldură în procesul izoterm ($dT=0$) va fi : $dQ_T = \left[\left(\dfrac{\partial U}{\partial a}\right)_T + A\right] da \neq 0$

și prin urmare, adiabata nu va coincide cu izoterma.

*

15. Să considerăm pe figură prin D' izoterma T_1 și adiabata S_1. Plasarea în figură a celor două izoterme reclamă $T > T_1$, iar plasarea adiabatelor e compatibilă cu relația $C_1 > C$ între constantele C și C_1 definite de ecuațiile adiabatelor $pV^\gamma = C$ și $pV^{\gamma_1} = C_1$. Din expresia primului principiu scrisă pentru un mol de gaz ideal $dQ = C_V dT + pdV$ și din ecuația termică $pV=RT$ rezultă $dT = \frac{1}{R}(pdV + Vdp)$ și de asemenea :

$$R \cdot dQ = C_V Vdp + C_p pdV = C_V pV\left(\frac{dp}{p} + \gamma\frac{dv}{V}\right) = C_V pVd\left(\ln pV^\gamma\right) = C_V pVd\ln C$$

Din această relație, se observă că o creștere a lui C este compatibilă cu absorbția de căldură. Astfel, în procesul politrop AD' se trece de la o izotermă mai ridicată (izoterma lui A) la una mai coborâtă (izoterma lui D'), deci $dT<0$ și de la adiabata lui A (mai coborâtă) la adiabata lui D'(mai ridicată), deci $dQ > 0$ și prin urmare capacitatea calorică $\dfrac{dQ}{dT}$ va fi negativă pe porți - unea AD'a politropei, ca dealtfel și pe porțiunea DA. Raționamentul se aplică și politropei EE' care reclamă o capacitate calorică pozitivă.

În procesele cu capacitate calorică negativă, lucrul mecanic efectuat de sistem este mai mare decât cantitatea de căldură primită sau, invers, lucrul mecanic efectuat asupra sistemului depășește ca valoare căldura absorbită de la sistem. Un astfel de proces se produce în stele, unde forțele gravitaționale efectuează, în cazul comprimării, un lucru mecanic mai mare decât căldura radiată.

*

16.

$$\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha V_0$$

$$\beta = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -V_0\beta$$

$$V = V(T,p) \Rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp$$

$$dL = -pdV = -p(\alpha V_0 dT - V_0\beta dp) = -pV_0(\alpha dT - \beta dp)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În comprimarea izotermă, $dT=0$. Obținem $dL_T = V_0\beta p dp$ și integrând între p_0 și p_1, rezultă : $L_T = V_0\beta\int_{p_0}^{p_1} pdp = \frac{V_0\beta}{2}\left(p_1^2 - p_0^2\right)$.În procesul încălzirii izobare, $dL_p = -\alpha p_1 V_0 dT$

$$L_p = -\alpha p_1 V_0 \int_{T_0}^{T_1} dT = -\alpha p_1 V_0 (T_1 - T_0)$$

Lucrul mecanic total $L = L_T + L_p$. Se obține :

$$L = \frac{V_0\beta}{2}\left(p_1^2 - p_0^2\right) - \alpha p_1 V_0 (T_1 - T_0)$$

*

17. Căldurile molare au valorile:

- *pentru gazul monoatomic* : $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$, $\gamma_m = \frac{5}{3}$

- *pentru gazul biatomic* : $C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = \frac{7}{2}R$, $\gamma_b = \frac{7}{5}$

Lucrul mecanic în transformarea adiabatică se calculează în cazul nostru în baza relației (2,72), din care deducem: $(T_2 - T_1)_m = \frac{\gamma_m - 1}{R}L$ și $(T_2 - T_1)_b = \frac{\gamma_b - 1}{R}L$ .Prin împărțirea acestor relații, obținem: $\frac{(T_2 - T_1)_m}{(T_2 - T_1)_b} = \frac{5}{3}$

*

*18.*Căldura molară medie la presiune constantă se obține imediat prin integrare

$$\overline{C}_p = \frac{1}{T_2 - T_1}\left[a(T_2 - T_1) + \frac{b}{2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) + \frac{c}{3}\left(T_2^3 - T_1^3\right)\right] =$$

$$= a + \frac{b}{2}\left(T_2^2 + T_1^2\right) + \frac{c}{3}\left(T_2^2 + T_1T_2 + T_1^2\right)$$

Pentru entalpie se folosește forma diferențială a primului principiu scrisă pentru transforma - rea izobară și definiția entalpiei.Se obține pentru un mol de gaz ideal $dH = C_p dT + Vdp$ echivalentă cu $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ .Integrând această relație între T_1 și T_2 se obține:

$$\Delta H = a(T_2 - T_1) + \frac{b}{2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) + \frac{c}{3}\left(T_2^3 - T_1^3\right)$$

*

19. După deschiderea robinetului, aerul atmosferic ocupă volumul V_0 într-un timp atât de scurt, încât vasul fiind izolat termic de exterior, singurul contact termic al vasului fiind cu atmosfera, procesul poate fi considerat adiabatic. Lucrul mecanic efectuat de atmosferă pentru a umple cu gaz la presiune p_0 volumul V_0 este egal cu p_0V_0 . Se obține $\Delta U = p_0V_0$ $(\Delta Q=0)$. Prin această detentă în vid, gazul se încălzește până la temperatura T astfel că,

$\Delta U = \nu C_V (T - T_0) = p_0V_0$ .Rezultă, $T = \frac{C_V + R}{C_V}T_0 = \frac{C_p}{C_V}T_0 = \gamma T_0$.

*

20. În procesul destinderii adiabatice în vid, $dQ = 0$ și $dL = 0$ deoarece destinderea gazului în vid se produce ca urmare a agitației termice. Rezultă $\Delta U = 0 \Rightarrow U = const. \Leftrightarrow U_1 = U_2$

a) *în cazul gazului ideal* $\frac{3RT_1}{2} = \frac{3RT_2}{2} \Leftrightarrow T_1 = T_2$

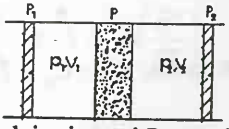
BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) *în cazul gazului real* $\frac{3RT_2}{2}-\frac{a}{V_2}=\frac{3RT_1}{2}-\frac{a}{V_1}$, din care se obține $T_2=T_1+\frac{2a}{3R}\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)$.

Dat fiind că $V_2>V_1$, se constată scăderea temperaturii.

*

21.



Prezentăm în figură evoluția procesului: pistonul P_1 este împins cuasistatic astfel că gazul ce părăsește compartimentul 1 trecând în compartimentul 2 prin peretele poros P să nu modifice presiunile în cele două compartimente. Aceasta presupune o deplasare a pistonului P_2 în sensul creșterii volumului compartimentului doi. Ca urmare volumul compartimentului unu scade de la V_1 la *0*, iar cel al compartimentului doi crește la V_2. Lucrul mecanic efectuat de sistem, este : $L=-\int_{V_1}^{0}p_1dV-\int_{0}^{V_2}p_2dV=p_1V_1-p_2V_2$. Procesul fiind adiabatic, în virtutea principiului întâi, $L=U_2-U_1=p_1V_1-p_2V_2$ sau echivalent $U_1+p_1V_1=U_2+p_2V_2$ relație care atestă *conservarea entalpiei.*

*

22. Din ecuația de stare $pV=\nu RT$, rezultă $V=\frac{\nu RT}{p}$ care introdus în relația impusă în problemă, conduce la ecuația: $\frac{\nu RT}{p}=\frac{p_0-p}{a}$ echivalentă cu ecuația $p^2-p_0p+a\nu RT=0$ ce admite cel mult două rădăcini.Pentru valoarea presiunii gazului egală cu $\frac{p_0}{2}$, izoterma $T=\frac{p_0^2}{4\nu R}$ este tangentă dreptei $p=p_0-aV$.

*

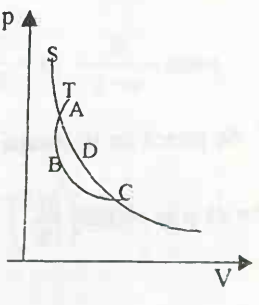
23. Din ecuația termică de stare $\rho=\frac{m}{V}=\frac{\mu p}{RT}$, se obține $\frac{dp}{p}=-\frac{\mu g}{RT}dh$. Impunând condiția de descreștere adiabatică a presiuni aerului presupus gaz ideal, folosim ecuația Poisson $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}=const.$ și obținem prin diferențierea acestei relații și separarea variabilelor T și p : $\frac{dT}{T}=\frac{1-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{dp}{p}$. Rezultă: $\frac{dT}{dh}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}=-9{,}7K\cdot Km^{-1}$.

*

24. Principiul al doilea al termodinamicii definește entropia ca o funcție monotonă ce caracterizează instantaneu stările prin care trece sistemul fizic antrenat într-un proces. Întrucât pe adiabată entropia este constantă, intersectarea adiabatelor ar însemna violarea monotoniei.

Să presupunem acum că izoterma TABC intersectează de două ori adiabata SADC (în punctele A și C). Ca urmare, se poate concepe ciclul ABCDA în care lucrul mecanic L este diferit de zero, fiind egal numeric cu aria ciclului. Cum punctele A și C se află pe aceeași adiabată, $S_A=S_C$ și

$$L=Q=\oint TdS=T\int_{(ABC)}dS=0.$$



S-a obținut astfel, o contradicție ce ne îndreptățește să afirmăm că o aceeași izotermă nu poate intersecta o adiabată decât o singură dată. Rezultă așadar că stările unui sistem în echilibru ce pot fi atinse din starea dată A pe cale izotermă, sunt inaccesibile adiabatic din această stare (principiul inaccesibilității adiabatice). Cu alte cuvinte stările sistemului în echilibru, care sânt atinse și prin alte transformări plecând dintr-o stare dată nu pot fi atinse printr-un proces adiabatic care se inițiază din aceași stare.

*

25. Folosim ecuația (2.51) sub forma: $C_A - C_a = T\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A$. Lucrul mecanic pentru întinderea barei se scrie : $dL = -fdl = -\sigma s dl$,în care σ este efortul unitar $\sigma = \frac{f}{s}$ sau solicitarea, $\varepsilon = \frac{dl}{l}$ este alungirea relativă sau deformarea, l reprezintă lungimea barei,iar s secțiunea.

Din expresia lucrului mecanic elementar $dL = Ada = -\sigma s dl$ rezultă $A \equiv -\sigma s$ și $a \equiv l$, astfel că se obține : $C_\sigma - C_\varepsilon = -Tsl\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_\varepsilon \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\sigma$

*

26. Avem $dU = dQ - pdV$, $dS = \frac{dQ}{T}$ și considerăm $U=U(p,T)$ și $V=V(p,T)$.

$$dS = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]\frac{dT}{T} + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right]\frac{dp}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT$$

Prin indentificare, se obține :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right]$$

Penultima ecuație este echivalentă cu $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T}$ și cum entropia este funcție de stare, $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial p} = \frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T}$ care prin efectuarea calculelor, conduce la $\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Se observă că membrul stâng este tocmai $T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V$, astfel că se obține: $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ și cum $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T}$, aplicând încă o dată egalitatea derivatelor mixte ale entropiei, rezultă :

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p = -V\alpha T\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p$$

*

27. Se pleacă de la ecuația $T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p$ care corelează ecuația termică cu ecuația calorică și se obține $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = (a / V^2)exp[-a / RTV]$.

*

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

28.

$$F = U - TS \Rightarrow dF = dU - TdS - SdT = dQ - pdV - TdS - SdT = -pdV - SdT$$

Rezultă: $dV = -\frac{S}{p}dT - \frac{1}{p}dF = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_F dT + \left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_T dF$, din care se obține

$$\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_T = -\frac{1}{p} \quad \text{și} \quad S = -p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_F = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_F}{\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_T}$$

*

29.

- în transformarea *izobară*: $Q_p = mc_p(T_2 - T_1) = \nu C_p(T_2 - T_1)$ c_p fiind *căldura specifică izobară* iar C_p=*căldura molară izobară* : $C_p = \mu c_p$. Pentru gazele perfecte

$$C_p = \frac{i+2}{2}R \qquad C_v = \frac{i}{2}R$$

$$c_p = \frac{i+2}{2\mu}R \qquad c_v = \frac{i}{2\mu}R$$

i fiind *numărul gradelor de libertate ale moleculelor.*

- în *transformarea izocoră* : $dQ_V = mc_v dT = \nu C_v dT$ relație ce conduce la

$$Q_v = \nu C_v(T_2 - T_1) = mc_v(T_2 - T_1)$$

- în *transformarea izotermă* : $dU=0$ și $dQ_T = dL_T$ *adică* $Q_T = L_T$ ceace arată că *în transformarea izotermă, căldura primită de la corpurile exterioare este transformată integral în lucru mecanic.*
- în *transformarea adiabatică*, $Q_{ad} = 0$ (și $\Delta U = -L_{ad}$);
- căldura în *transformarea politropă*, este : $Q = mc(T_2 - T_1) = \nu C(T_2 - T_1)$.

Cum, $n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$ rezultă $C = C_v \frac{n-\gamma}{n-1}$ unde *n este indice politropei.* Se obține :

$$Q = \nu C_v \frac{n-\gamma}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$$

*

30. Toate ecuațiile sunt de forma $pV^k = const.$ Ele reprezintă transformări politrope (având căldura molară constantă). În baza principiului întâi $dQ = dU + dL = \nu C_v dT + pdV = \nu C dT$ astfel, că : $C = C_v + \frac{p}{\nu}\left(\frac{dV}{dT}\right)$.

Ecuația politropei în coordonate (V,T) fiind $TV^{n-1} = const.$ echivalentă cu $V = const \cdot T^{\frac{1}{1-n}}$, conduce la $\frac{dV}{dT} = const. \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \frac{T^{\frac{1}{1-n}}}{T} = \frac{V}{(1-n)T}$. Rezultă, $C = C_v + \frac{1}{1-n}\frac{pV}{\nu T} = C_v + \frac{R}{1-n} = const$

Cum $C_v = \frac{i}{2}R$ se obțin valorile:

$$1).\ C = \frac{R}{2}(i+1)\ ;\ 2).\ C = R\left(\frac{i}{2} + \frac{1}{3}\right)\ ;\ 3).\ C = \frac{R}{2}\left(i + \frac{1}{2}\right);\ 4).\ C = R\left(\frac{i}{2} - 1\right).$$

*

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

31. Vom considera $U=U(T,V)$. Va trebui să integrăm ecuația $dU=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$ pentru gazul ideal pentru care $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=0$ și pentru gazul real pentru care $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=\nu^2\frac{a}{V^2}$.

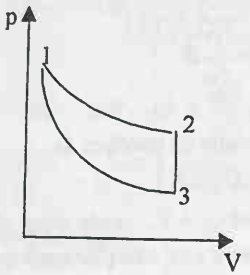
Se va ține seama, de asemenea, că $C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. Se obțin ecuațiile :

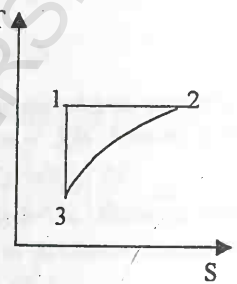
$$U=\nu C_V(T-T_0)+U_0 \quad \textit{pentru gazul ideal}$$

și

$$U=\nu C_V T-\nu^2\frac{a}{V}+U_{ref.} \quad \textit{pentru gazul real}$$

În acestă ecuație termenul $U_{ref.}=U_0+\frac{\nu^2\cdot a}{V_0}-\nu C_V T_0$ reprezintă o *referință* pentru energia internă. S-a considerat că în starea inițială sistemul se află la temperatura T_0 și are energia in-





ternă U_0. Pentru *variația energiei interne* se obțin expresiile :

- pentru *gazul ideal* : $\Delta U=\nu C_V(T-T_0)=\nu C_V\Delta T=\nu\frac{i}{2}R\Delta T$

care se particularizează pentru un proces oarecare ce se desfășoară între stările 1 și 2, la forma

$$\Delta U=U_2-U_1=\nu C_V(T_2-T_1)=\nu\frac{i}{2}R(T_2-T_1)=\frac{i}{2}(p_2V_2-p_1V_1)$$

- pentru *gazul Van der Waals*, se obține : $U-U_0=\nu C_v(T-T_0)-\nu^2 a\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{V_0}\right)$

Scrierea variației energiei interne pentru cazurile particulare specificate este de acum, trivială.

*

32. Expresia principiului întâi pentru un astfel de sistem, se scrie: $dQ=dL+d\left(U+\frac{Mv^2}{2}\right)$

Pentru entalpia diferențială dH, se scrie: $dH=dQ-dL+d(pV)$.

*

33. În baza ecuației termice de stare a gazului ideal $pV=\nu RT$ și a ecuației adiabatei $pV^\gamma=$ $=const.$, se scrie expresia lucrului mecanic: $L=-\int pdV=-const.\int\frac{dV}{V^\gamma}=\frac{\nu R}{\gamma-1}(T_2-T_1)$.

*

34.

1). Transformarea 1->2 este izotermă : $T_2=T_1=300\ K$; $p_1V_1=p_2V_2 \Rightarrow p_2=0{,}75\ atm.$ Procesul 2->3 este izocor : $V_3=V_2=16m^3$, iar procesul 3->1 este adiabatic: $p_3V_3^\gamma=p_4V_4^\gamma \Rightarrow$ $p_3\cong 0{,}45\ atm.$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ecuația

$$T_3V_3^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} \cdot T_1 \cong 180\ K$$

2). $L_{1\to 2} = -\int_1^2 pdV = -p_1V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -12(\ln 4)\cdot 1{,}01\cdot 10^5\ J = -16{,}84J$

*

35.

$$dL = Fd\ell$$

și întrucât procesul este izoterm, $d\ell = \left(\frac{\partial \ell}{\partial F}\right)_T dF = \frac{\ell}{AE}dF$ .Rezultă, prin integrare:

$$L = \frac{\ell}{AE}\int_0^{F_1} FdF = \frac{\ell}{2AE}F_1^2$$

*

36. Considerăm $V=V(T,p)$ și avem : $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp = \alpha VdT - \beta Vdp$

a) în condiții izoterme, $dV= -\alpha Vdp$ și cum α și β sunt mici, se consideră $V=const.$ Se obține pentru lucrul mecanic $L_T = -\int_{p_1}^{p_2} pdV \cong \beta V\int_{p_1}^{p_2} pdp = \frac{V}{2}\beta\left(p_2^2 - p_1^2\right) = 408J$.

b) în procesul izobar, $Lp = -p\alpha V\int_{T_1}^{T_2} dT = -p\alpha V(T_2 - T_1) = -8{,}1J$

*

37. Conform primului principiu $dQ = dU + pdV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) + p\right]dV$

Dacă dQ ar fi diferențială totală exactă, ar trebui ca :

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0$$

relație ce nu concordă cu experiența. De exemplu, în cazul gazului ideal,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\nu R}{V} \neq 0$$

*

38. În virtutea primului principiu, transformarea fiind adiabatică, rezultă :

$$dQ = dU + dL = 0 = dL \Rightarrow \nu = const. \Leftrightarrow T = const.$$

În procesul izobar, pentru un mol de gaz $L_p = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -p\Delta V$ și $Q_p = C_p\Delta T = \frac{p}{R}C_p\Delta V$.

$\Delta U_p = Q_p + L_p = \frac{p\Delta V}{\gamma - 1}$ în care $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ și $C_p - C_V = R$.

*

39. În virtutea celui de al doilea principiu, un astfel de proces presupune *compensație*. În procesul transformării căldurii în lucru mecanic, compensația se poate materializa fie prin trnsmiterea unei părți din căldură către sursa rece, fie prin modificarea stării corpului de lucru dacă procesul nu este ciclic. De exemplu, în cazul gazului ideal energia internă nu depinde de volum și căldura preluată de la sursa caldă se transformă integral în lucru de destindere, astfel că în acest caz, conpensația se concretizează în variația volumului gazului. Comprimarea gazului spre volumul lui inițial presupune să se efectueze lucru mecanic în valoare egală cu

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

acela obținut la destindere, eliberându-se astfel integral căldura preluată inițial de la sursa caldă .

*

40. În acest caz, $dL = -pdV - mgdh$ și ecuația fundamentală a termodinamicii devine:

$$TdS = dU + pdV + mgdh$$

Notând $U'=U+mgh$ energia totală internă incluzând și energia potențială mgh în câmp gravitațional, $dU=d\,U'- mgdh - ghdm$. Rezultă: $TdS = dU' + pdV - ghdm$ în care $dm=\rho dV$. Forma finală a ecuației $TdS = dU'+(p-\rho gh)\,dV$ evidențiază faptul că p și h sunt forțe generalizate (parametri intensivi), iar V și m coordonate generalizate (parametri extensivi).

*

41. Din principiul întâi, $dQ = dU + dL$ și $dQ_{nest.} = -dU + dL_{nest.}$. Prin adunarea ecuațiilor se obține că pentru orice proces ciclic, suma $dQ + dQ_{nest.} = dL + dL_{nest.}$ este negativă, deoarece în caz contrar s-ar efectua pe seama căldurii $dQ + dQ_{nest.} > 0$ lucrul mecanic $dL + dL_{nest.} > 0$ *fără compensație*. Rezultă $-dL > dL_{nest.}$ ceea ce înseamnă că lucrul mecanic al sistemului într-un proces cuasistatic (2-1), egal cu $dL' = -dL$ este mai mare decât lucrul mecanic într-un proces nestatic (2-1).

Acest exemplu arată că în cazul proceselor nestatice este posibil un proces închis cu un singur termostat, în care lucrul mecanic este diferit de zero. Într-un astfel de sistem, lucrul mecanic într-un astfel de ciclu va fi negativ; aceasta înseamnă că el este efectuat de corpurile exterioare și se cheltuiește pentru creșterea energiei interne a termostatului.

*

42 .Scriem și explicităm mărimile în expresia principiului întâi :

$$dQ = dU + pdV = C_V.dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]dV = C_V.dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$$

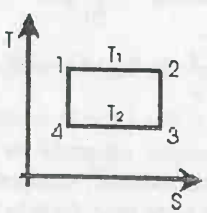
și ținând seama că $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha}{\beta}$ se obține, $dQ = C_V.dT + \frac{T\alpha}{\beta}dV$.

În procesul adiabatic, $dQ=0$ și rezultă $dT = -\frac{T\alpha}{C_V\beta}dV$, care pentru $\alpha<0$ și $dV<0$ (comprimare), arată că în cazul comprimării adiabatice $dT < 0$, adică apa se răcește într-un astfel de proces.

*

43. Să parcurgem un ciclu Carnot, folosind apa ca substanță de lucru, între temperaturile $T_1 = 10^0$ C și $T_2 = 4^0 C$. Pentru acest ciclu, $\oint \frac{dQ}{T} = 0$ sau $\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0$.

Avem: $\Delta S_{12} = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_1}{283K} > 0$; $\Delta S_{23} = \Delta S_{41} = 0$. La temperatura $T_2 = 4^0 C = 277K$, din ecu-



ația primului principiu, se obține: $dQ = C_V.dT + \frac{T\alpha}{\beta}dV$, ceea ce arată că la $4^0 C$, $\alpha = 0$ și ca urmare $\Delta S_{34} = 0$. Rezultă $\oint \frac{dQ}{T} = \frac{Q_1}{283} \neq 0$, relație în contradicție cu principiul al doilea.

Concluzia ce se desprinde de aici este că temperatura de $4^0 C$ este inaccesibilă pentru apă la o răcire a acesteia printr-o destindere adiabatică.

*

44. Se integrează ecuația fundamentală a termodinamicii :

$$S = \int \frac{dU + pdV}{T} = \int \frac{C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV}{T} = \int \frac{C_V dT}{T} + \int \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$$

și cum $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b}$, rezultă $S = \int \frac{C_V dT}{T} + R\ln(V-b) + S_0$ .Considerând că C_V nu depinde de temperatură se obține: $S = C_V \ln T + R\ln(V-b) + S_0$ .Pentru procesul adiabatic, S = S_0 și ecuația devine: $T(V-b)^{\frac{R}{C_V}} = const.$

*

45. O echivalență totală între planele (p,V) și (T,S) se stabilește dacă Jacobianul transformării de variabile este egal cu 1.

$$\frac{\partial(p,V)}{\partial(T,S)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial T} & \frac{\partial p}{\partial S} \\ \frac{\partial V}{\partial T} & \frac{\partial V}{\partial S} \end{vmatrix} = 1. \qquad (1)$$

sau, echivalent

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial(p,V)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial p} & \frac{\partial T}{\partial V} \\ \frac{\partial S}{\partial p} & \frac{\partial S}{\partial V} \end{vmatrix} = \frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{\partial S}{\partial V} - \frac{\partial T}{\partial V}\cdot\frac{\partial S}{\partial p} = 1. \qquad (2)$$

unde notăm $pV \equiv x$ și $pV^\gamma \equiv y$ și obținem : $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p} = T'_x \cdot V$; $\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial V} = T'_x \cdot p$;

$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial S}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial V} = \gamma V^{\gamma-1} p S'_y$; $\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial S}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial p} = V^\gamma \cdot S'_y$ și introducând în (2), obținem :

$$T'_x S'_y \gamma V^\gamma p - T'_x S'_y p V^\gamma = T'_x S'_y p V^\gamma (\gamma - 1) = T'_x S'_y (\gamma - 1) y = 1$$

sau

$$T'_x = \frac{dT}{dx} = \frac{1}{\frac{dS}{dy}(\gamma - 1)y} \qquad (3)$$

Relația (3) exprimă o separare de variabile independente x și y care presupune ca ambii membri să fie constanți în raport cu x sau y și bineînțeles, egali cu aceeași constantă pe care o vom nota cu $\frac{1}{R}$ .Obținem $T'_x = \frac{1}{R}$ și $\frac{1}{S'_y(\gamma-1)y} = \frac{1}{R}$ sau $S'_y = \frac{R}{(\gamma-1)y}$. Prin integrare, se obține :

$$T = \frac{x}{R} + C_1 \text{ și } S = \frac{R}{\gamma - 1}\ln y + C_2 = \frac{R}{\gamma - 1}\ln\left(pV^\gamma\right) + C_2 \qquad (4)$$

care presupune pentru C_2 , o expresie de forma $C_2 = S_0 - \frac{R}{\gamma - 1}\ln(p_0 V_0)$ și

$$S - S_0 = \frac{R}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{pV^\gamma}{p_0 V_0{}^\gamma}\right) \qquad (5)$$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a se obține concordanță cu rezultatele experimentale, constanta C_1 se consideră nulă, iar S_0 se determină prin metodele fizicii statistice.Ecuația (5) se mai scrie sub formele echivalente:

$$S - S_0 = \frac{R}{\gamma - 1} ln\left(\frac{pV^\gamma}{p_0 V_0^\gamma}\right) = \frac{R}{\gamma - 1} ln\left(\frac{TV^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}}\right) = \frac{R}{\gamma - 1} ln\left(\frac{T^\gamma p^{1-\gamma}}{T_0^\gamma p_0^{1-\gamma}}\right)$$

Din ecuația (5), rezultă $pV^\gamma = const.e^{\frac{(\gamma-1)S}{R}}$.

*

46.

- pentru *procese izocore*, V=*const.* și $p \cdot V^\gamma = \frac{RT}{V} \cdot V^\gamma = const.e^{\frac{(\gamma-1)S}{R}}$ din care, rezultă

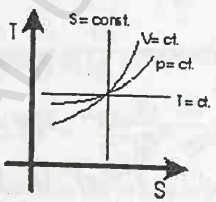
$$T = const.\frac{V^{1-\gamma}}{R} \cdot e^{\frac{(\gamma-1)S}{R}} = T_1(V)e^{\frac{(\gamma-1)S}{R}}$$

- pentru *procese izobare*, p = *const.* și $pV^\gamma = p\left(\frac{RT}{p}\right)^\gamma = const..e^{\frac{(\gamma-1)S}{R}}$

echivalentă cu $T = \frac{const.}{R} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot e^{\frac{(\gamma-1)S}{R\gamma}} = T_2(p)e^{\frac{(\gamma-1)S}{\gamma R}}$.

- *izotermele* sunt descrise de T = *const.*
- *adiabatele* corespund entropiei S = *const.*

Curbele corespunzătoare sunt redate în figură:



Cum $\gamma > 1$ izocorele sunt mai înclinate decât izobarele.

*

47. Se ține seama în expresia primului principiu de ecuația energiei $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$ și că $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. Se obține ecuația: $C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = 0$ .Cum $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = p_0 m$, se obține prin integrare: $C_V ln T + p_0 mV = const.$, echivalentă cu $T^{C_V} e^{mp_0 V} = const$.

*

48. Pentru gazul ideal, $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}[dU + pdV] = \frac{1}{T}[\nu C_V dT + pdV] = \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R\frac{dV}{V}$ ex - presie care se integrează pentru un proces ce evoluează între o stare inițială (T_0, V_0) și o stare finală curentă (T,V) și se obține: $\Delta S = S - S_0 = \nu C_V ln\frac{T}{T_0} + \nu R ln\frac{V}{V_0}$.

otând $S_r \equiv S_0 - \nu C_V ln T_0 - \nu R ln V_0$,se obține $S = \nu C_V ln T + \nu R ln V + S_r$ astfel că variația de

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

entropie între stările 1 şi 2 , va fi : $\Delta S = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln\frac{V_2}{V_1}$.

Folosind ecuaţia transformării generale pentru gazul ideal $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$ şi ecuaţia lui Mayer $C_p - C_V = R$,apoi eliminând convenabil în expresia pentru S, se obţin pe rând expresiile: $S(p,V) = \nu C_V \ln p + C_p \ln V + S_r'$ şi $S(T,p) = \nu C_p \ln T - \nu R \ln p + S_r''$ în care , $S_r' = S_0 - \nu C_V \ln p_0 - \nu C_p \ln V_0$ şi $S_r'' = S_0 - \nu C_p \ln T_0 - \nu R \ln p_0$.În continuare, particularizarea este trivială.

*

49. Entropia sistemului format din cele două gaze înainte de difuzie, este :

$$S' = \nu_1\left(C_{V_1} \ln T + R \ln V_1 + S_{01}\right) + \nu_2\left(C_{V_2} \ln T + R \ln V_2 + S_{02}\right)$$

După difuzie, entalpia totală a sistemului, se scrie:

$$S'' = \nu_1\left[C_{V_1} \ln T + R \ln(V_1 + V_2) + S_{01}\right] + \nu_2\left[C_{V_2} \ln T + R \ln(V_1 + V_2) + S_{02}\right]$$

astfel că rezultă pentru variaţia de entropie: $\Delta S = S'' - S' = (\nu_1 + \nu_2) R \ln\frac{V_1 + V_2}{V_1}$.

Se observă că $\Delta S > 0$.

*

50. Temperatura rămânând constantă şi gazele fiind ideale,energia internă nu variază şi $dU=0$.

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + dL}{T} = \frac{pdV}{T} = \nu R \frac{dV}{V}$$

Se obţine, pentru fiecare componentă, $\Delta S_1 = \nu_1 R \ln\frac{V}{V_1}$ şi $\Delta S_2 = \nu_2 R \ln\frac{V}{V_2}$. Variaţia totală ΔS a entropiei, va fi: $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = R\left[\nu_1 \ln\frac{V}{V_1} + \nu_2 \ln\frac{V}{V_2}\right]$ şi ţinând seama de ecuaţiile termice ale componentelor şi de relaţia $V = V_1 + V_2$ se obţine: $\Delta S = R\left[\nu_1 \ln\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1} + \nu_2 \ln\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_2}\right]$

Această relaţie nu mai este valabilă în cazul difuziei componentelor identice, deoarece în acest caz nu se produce nici un proces microscopic (vezi paradoxul lui Gibbs).

*

51. Entropia totală a sistemului înainte de a se pune în comunicaţie vasele este suma entropiilor celor două gaze: $S = S_1 + S_2$ unde

$$S_1 = S_{10} + \nu C_p \ln T - Nk \ln p_1 \quad \text{şi}$$

$$S_2 = S_{20} + \nu C_p \ln T - Nk \ln p_2 .$$

Rezultă: $S = S_{10} + S_{20} + 2\nu C_p \ln T - Nk \ln p_1 p_2$.

Ca urmare a conservării energiei interne, după punerea în comunicaţie a vaselor temperatura sistemului se păstrează la valoarea T în timp ce presiunea devine $p = \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2}$ iar entropia totală a sistemului, se scrie $S' = S_{01} + S_{02} + 2\nu C_p \ln T - 2Nk \ln p$.

Variaţia entropiei totale la sfârşitul procesului de difuzie a gazelor, va fi :

$$\Delta S = S' - S = Nk \ln\frac{(p_1 + p_2)^2}{4p_1p_2} > 0$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

52. Înainte de a fi puse vasele în comunicație, entropia totală a sistemului format de cele două gaze se scrie $S = S_1 + S_2 = S_{10} + S_{20} + \nu C_p \ln T_1 T_2 - 2Nk \ln p$. În urma procesului de difuzie, temperaturile celor două gaze se egalează astfel că din considerarea conservării energiei interne, rezultă în urma reducerii constantelor de integrare U_{01} și U_{02}: $2\nu C_v T = \nu C_v T_1 + \nu C_v T_2$ din care se obține $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$. După amestecarea gazelor, presiunea se păstrează iar entropia totală a sistemului, devine: $S' = S_{10} + S_{20} + 2\nu C_p \ln T - 2Nk \ln p$ iar variația entropiei sistemului rezultată din proces: $\Delta S = S' - S = \nu C_p \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} > 0$.

*

53. Considerăm că energia internă $U=U(T,V)$: $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$. De asemenea, entropia $S=S(T,V)$ și $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$.

Cum $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + dL}{T} = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + pdV\right]$ și identificând ultimele două relații, se obține: $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ și $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p + p\right]$.

Din ultimele relații, rezultă $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}$ și $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = -\frac{1}{T^2}\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] +$

$+\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}\right]$ astfel că $\frac{1}{T}\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ sau $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$.

În continuare, se ține seama de ecuațiile termice de stare:

-pentru gazul ideal $p = \frac{\nu RT}{V}$ se obține $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \nu\frac{RT}{V} - p = 0$

-pentru gazul Van der Waals $p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{a}{V^2}$ și $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - p = \nu^2 \frac{a}{V^2}$.

*

54.

1. În condițiile problemei, se poate scrie succesiv:

$T_1 = aV_1 - bV_1^2; T_2 = aV_2 - bV_2^2 = 2aV_1 - 4bV_1^2$ și $T_2 - T_1 = aV_1 - 3bV_1^2$ astfel că,

$$\Delta U = \nu\frac{i}{2}R\left(aV_1 - 3bV_1^2\right)$$

Cum $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} \Rightarrow i = \frac{R}{\gamma - 1}$ rezultă $\Delta U = \frac{\nu R}{\gamma - 1}\frac{RT_1}{p_1}\left(a - 3b\frac{RT_1}{p_1}\right)$.

2. Condiția $\Delta U = 0$ conduce la relația $a = 3b\frac{RT_1}{p_1}$.

3. Lucrul mecanic efectuat de gaz se scrie $L = \int_{V_1}^{V_2} pdV$.

Din relația $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{pV}{T}$, rezultă $p = \frac{p_1 V_1}{T_1}\cdot\frac{T}{V}$ care permite scrierea relației:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$L=\int_{V_1}^{V_2}\frac{p_1V_1}{T_1}\cdot\frac{T}{V}dV=\frac{p_1V_1}{T_1}\left[a(V_2-V_1)-\frac{b}{2}\left(V_2^2-V_1^2\right)\right]$$

şi cum $V_2=2V_1$, obţinem: $L=\frac{p_1V_1}{T_1}\left(a-\frac{3b}{2}V_1\right)=\frac{R^2T_1}{p_1}\left(a-\frac{3b}{2}\frac{RT_1}{p_1}\right)$.

*

55. Procesele izentrope (entalpie const.) sunt procese adiabatice, astfel că se pot scrie ecuaţiile Poisson: $TV^{\gamma-1}=const.$ şi $pV^{\gamma}=const.$ Eliminând volumul între aceste ecuaţii se obţine :

$$p_2=p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=2\cdot10^6\,\frac{N}{m^2}$$

*

56. În cazul gazelor identice, punere în comunicaţie a două vase de volum V, fiecare conţinând acelaşi gaz, nu determină amestecarea gazelor ci comprimarea gazului cu cedarea către termostat a căldurii ΔQ urmată de o scădere ΔS a antropiei $\Delta S=\frac{\Delta Q}{T}$. Deşi prin punerea în legătură a vaselor moleculele conţinute în compartimente diferite îşi vor schimba vasul, nu se produce o amestecare propriu zisă a gazelor identice, ci mai degrabă un proces de autodifuzie. Ca urmare a acestui proces, entropia după autodifuzie va fi egală cu suma entropiilor părţilor componente, calculate în ipoteza că fiecare parte ocupă volumul V din care se va sca - de cantitatea: $\frac{|\Delta Q|}{T}=\frac{L_T}{T}=\frac{2\nu RT\ln\frac{2V}{V}}{T}=2\nu R\ln2$.

Acestă constatare anihilează *paradoxul lui Gibbs* ce apare prin aplicarea teoremei lui Gibbs în cazul gazelor identice. Într-adevăr, în procesul de difuzie a gazelor diferite,entropia sistemului celor două gaze conţinute în vasele de volume V, era egală cu $S_1=C_{V_1}\ln T+R\ln V+S_{01}+$ $+C_{V_2}\ln T+R\ln V+S_{02}$.Entropia totală a sistemului în urma difuziei, va fi:

$$S_{11}=C_{V_1}\ln T+R\ln2V+S_{01}+C_{V_2}\ln T+R\ln2V+S_{02}.$$

Variaţia entropiei în procesul de difuzie : $\Delta S=S_{11}-S_1=2R\ln2>0$ nu depinde de proprietăţile gazelor. În procesul de autodifuzie, entropia totală a gazelor rezultată prin punerea în legă - tură a vaselor, se va scrie ţinând seama de comprimare :

$$S'_{11}=C_{V_1}\ln T+R\ln2V+S_{01}+C_{V_2}\ln T+R\ln2V+S_{02}-2R\ln2$$

rezultând că variaţia de entropie ca urmare a autodifuziei va fi $S'_{11}-S'_1=S'_{11}-S_1=0$ şi astfel paradoxul lui Gibbs nu mai apare.

*

57. Aditivitatea entropiei reclamă faptul că entropia a ν moli de gaz $S_\nu=\nu S_1$, unde S_1 este entropia unui mol. Prin integrarea ecuaţiei fundamentale a termodinamicii, se obţin relaţiile:

$$S_1-S_{01}=C_V\ln\frac{T}{T_0}+R\ln\frac{V}{V_0}\qquad(1)$$

pentru un mol şi

$$S_\nu-S_{0\nu}=\nu C_V\ln\frac{T}{T_0}+\nu R\ln\frac{\nu V}{\nu V_0}\qquad(2)$$

pentru ν moli.Rezultă $S_\nu=\nu C_V\ln T+\nu R\ln\nu V-\nu C_V\ln T_0-\nu R\ln\nu V_0+\nu S_{01}$,expresie care evidenţiază dependenţa de ν a mărimii b_ν: $b_\nu=-\nu R\ln\nu V_0-\nu(C_V\ln T_0-S_{01})$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ținând seama că $\nu = \frac{N}{N_A}$ și notând

$$B \equiv \frac{1}{N_A}\left(-C_V \ln T_0 + S_{01} - R\ln\frac{V_0}{N_A}\right) \qquad (3)\text{, rezultă:}$$

$$b_\nu = -\nu R \ln N + BN. \qquad (4)$$

Prin introducerea relației (3) în relațiile (1) și (2), se obține pentru entropia a ν moli:

$$S_\nu = \nu C_V \ln R + \nu R \ln \nu V - \nu R \ln N + BN$$

*

58. Presupunem – după Boltzmann - că $S = f(\Omega)$.Pentru un sistem compus din două subsisteme $S_1 = f(\Omega_1)$ și $S_2 = f(\Omega_2)$. În baza aditivității entropiei (teorema lui Gibbs),

$$S = S_1 + S_2 = f(\Omega_1) + f(\Omega_2) = f(\Omega)$$

În cazul sistemelor independente $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$, astfel că va trebui să stabilim acea dependență $f(\Omega)$ care să satisfacă ecuația funcțională: $f(\Omega) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2)$.Vom deriva această relație în raport cu fiecare variabilă în parte. Se obține :

$$f'(\Omega_1) = \frac{df}{d\Omega_1} = \frac{df}{d(\Omega_1 \cdot \Omega_2)}\frac{d(\Omega_1 \cdot \Omega_2)}{d\Omega_1} = \Omega_2 \cdot \frac{df}{d(\Omega_1 \cdot \Omega_2)} \quad \text{și}$$

$$f'(\Omega_2) = \frac{df}{d\Omega_2} = \frac{df}{d(\Omega_1 \cdot \Omega_2)}\frac{d(\Omega_1 \cdot \Omega_2)}{d\Omega_2} = \frac{df}{d(\Omega_1 \cdot \Omega_2)} \cdot \Omega_1$$

de unde

$$\frac{f'(\Omega_1)}{f'(\Omega_2)} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \Rightarrow \frac{df(\Omega_1)}{d\Omega_1}\Omega_1 = \frac{df(\Omega_2)}{d\Omega_2}\Omega_2 = const.$$

care prin integrare conduce la expresia: $f(\Omega) = const. \cdot \ln\Omega$, echivalentă cu $S = K \ln \Omega$.

*

59. Scriem expresia principiului al doilea sub forma: $dS = \frac{dQ}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\frac{dV}{T}$

apoi, ținem seama de relația $T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p$ și de ecuația termică scrisă sub forma :

$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}$. Se obține: $dS = C_V d\ln\left[T(V - \nu b)^{\frac{\nu R}{C_V}}\right]$ din care rezultă prin integrare

$S = C_V \ln\left[T(V - \nu b)^{\frac{\nu R}{C_V}}\right]$. Izentropele se obțin punând $S = const.$

*

60. $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + pdV}{T} = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + pdV\right] =$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]dV$$

Cum dS este o diferențială totală exactă, trebuie să existe egalitatea: $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$ adică,

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right]=\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p\right]\right\}$. După derivare se ține seama că dU este diferențială totală exactă și $\frac{\partial^2 U}{\partial T\partial V}=\frac{\partial^2 U}{\partial V\partial T}$, rezultând în final ecuația energiei.

*

61. În acest caz $Q=0$ și $L=0$ ceea ce implică $\Delta U=0$ și ca urmare, $\Delta T=0$. Cum pentru un mol de gaz $S=C_V\ln T+R\ln V+S_0$, rezultă $\Delta S=S(T,V_2)-S(T,V_1)=R\ln\frac{V_2}{V_1}>0$ ceea ce arată că procesul este ireversibil. Ecuația fundamentală a termodinamicii

$$dS=\frac{dQ}{T}=\frac{C_V dT+pdV}{T}$$

scrisă pentru un proces izoterm,conduce la $dS=\frac{p}{T}dV=-\frac{V}{T}dp=-\frac{R}{p}dp$. Rezultă prin integrare, $\Delta S=-R\ln\frac{p_2}{p_1}=-19{,}1\,j/KmolK$.

*

62. Randamentul maxim de utilizare a energiei preluate de la un sistem se obține într-un ciclu Carnot reversibil, astfel că energia maximă ce poate fi transferată sub formă de lucru mecanic de la un sistem se determină cu o mașină Carnot, ce funcționează între cele două corpuri până la egalizarea temperaturilor .Avem: $-L=Q_1-|Q_2|$, Q_1 fiind energia preluată sub formă de căldură de la corpul cald, iar Q_2 energia cedată sub formă de căldură, corpului rece.

$Q_1=mc_p\int_{T_0}^{T_a}dT=mc_p(T_a-T_0)$; $Q_2=mc_p(T_0-T_b)$, T_0 fiind temperatura finală a corpurilor la echilibrul termic. Se obține: $-L=mc_p(T_a+T_b-2T_0)$. În cazul ciclului Carnot, $\frac{Q_1}{|Q_2|}=\frac{T_1}{T_2}$. Temperaturile surselor fiind variabile,scriem relația sub formă diferențială $\frac{dQ_1}{|dQ_2|}=\frac{T_1}{T_2}$, unde $dQ_1=mc_p dT_1$ și $dQ_2=mc_p dT_2$. Rezultă: $-\frac{dT_1}{dT_2}=\frac{T_1}{T_2}\Rightarrow\frac{dT_1}{T_1}=-\frac{dT_2}{T_2}$.Prin integrarea ultimei relații, $\int_{T_a}^{T_0}\frac{dT_1}{T_1}=-\int_{T_b}^{T_0}\frac{dT_2}{T_2}$ se obține $T_0=(T_aT_b)^{1/2}=424K\Rightarrow L=208KJ$. Rezerva de energie a sistemului fiind $Q=mc_p(T_a-T_b)$ rezultă că energia "netransferabilă" prin lucru mecanic va fi $Q-(-L)=2mc_p(T_0-T_b)=992KJ$ și va folosi pentru a aduce ambele corpuri la temperatura T_0.

*

63. $C_V=\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$; $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_V=T\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V=T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$.Pe de altă parte,

$$dS=\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT+\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV=\frac{dU+pdV}{T}=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT+\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p\right]dV=$$

$$=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT+\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

S-a folosit ecuația energiei: $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$. Prin indentificarea celor doi membri ai ecuației, se obține: $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ care conduce la $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V$.

*

64.

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV = \frac{C_V}{T}dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$$

în ipoteza că $S=S(T,V)$, sau: $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp = \frac{C_p}{T}dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp$.

Impunând condiția egalității derivatelor parțiale de ordinul II mixte, se obțin relațiile :

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V ; \frac{1}{T}\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p .$$

Folosind ecuația termică de stare, se obține că $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = 0$ și $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p = 0$.

Rezultă: $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = 0$ și $\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = 0$. Pe de altă parte, $\left(\frac{\partial C_p}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$ și $\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0$. Cum însă $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \neq 0$, rezultă din aceste ecuații: $\left(\frac{\partial C_V}{\partial p}\right)_T = 0$ și $\left(\frac{\partial C_p}{\partial V}\right)_T = 0$.

*

65. Aplicăm principiul al doilea: $dS = \frac{dQ}{T} = C_F \frac{dT}{T} + \frac{b}{T}dF$. Conform principiului întâi: $dU = dQ - dL = dQ - Fdl$, în care $l=l(T,F)$ și $dl = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_F dT + \left(\frac{\partial l}{\partial F}\right)_T dF$ astfel încât:

$$dU = \left[C_F + F\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_F\right]dT + \left[b + F\left(\frac{\partial l}{\partial F}\right)_T\right]dF .$$

Cum dS și dU sunt diferențiale totale exacte, se obțin relațiile:

$$\frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{C_F}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{b}{T}\right) ; \frac{\partial}{\partial F}\left(C_F + F\frac{\partial l}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(b + F\frac{\partial l}{\partial F}\right) \Rightarrow b = T\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_F .$$

Capacitatea calorică C_l la lungime constantă rezultă din $C_l = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_l$. Se obține:

$$C_l - C_F = T\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_F \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_l .$$

*

66. Presupunem $l=l(T,f)$. Prin diferențiere: $dl = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_f dT + \left(\frac{\partial l}{\partial f}\right)_T df$ sau în proces izoterm:

$dl = \left(\frac{\partial l}{\partial f}\right)_T df \Rightarrow \Delta l = \frac{l_0}{sY} f$, unde $Y = \frac{l_0}{s}\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_T$ este *modulul lui Young*.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Folosind dependența $S=S(T, f)$, în baza problemei anterioare, în proces izoterm,

$$dS = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_f df = \lambda l_0 df$$

din care, se obține $\Delta S = \lambda l_0 f$. Rezultă, $dQ = TdS = \lambda l_0 dfT \Rightarrow Q = \lambda l_0 Tf$.

Analog, se consideră dependența $U=U(T, f)$ obținând în baza rezultatelor problemei anterioare pentru procesul izoterm: $\Delta U = \left[T\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_f + f\left(\frac{\partial l}{\partial f}\right)_T\right]df = Tl_0\lambda df + \frac{l_0}{sY} fdf = fl_0\left(\lambda T + \frac{f}{2sY}\right)$.

*

67.

$$\Delta F = \Delta(U - TS) = \Delta U - \Delta(TS) = C_V(T_2 - T_1) -$$
$$- R(T_2 \ln V_2 - T_1 \ln V_1) - C_V(T_2 \ln T_2 - T_1 \ln T_1) - (T_2 - T_1)S_0 =$$
$$= (-12061,2 - 100S_0)J$$

și pentru ΔG în proces izocor, $\Delta G = \Delta(F + pV) = \Delta F + R\Delta T = (-11221,6 - 100S_0)J$.

În procesul izobar, un calcul analog care consideră variabilele p și T, conduce la expresiile:

$$\Delta F = (-16640 - 100S_0)J$$
$$\Delta G = (-15884 - 100S_0)J$$

*

68. Folosim relația $S = S_0 + C_p \ln T - R \ln p$. Obținem:

$$\Delta S = S(T,100) - S(T,1) = -R(\ln p_f - \ln p_i) = -R \ln 100 = -38,2\ J/K$$

Transformarea fiind izotermă, $\Delta U_T = 0$. Rezultă:

$$\Delta F = \Delta(U_T - TS) = \Delta U_T - T\Delta S = -T\Delta S = RT \ln 100 = 11,2\ KJ$$
$$\Delta G = \Delta(F + pV) = \Delta F = 11,2KJ$$

*

69.

Folosim inecuația fundamentală a termodinamicii: $TdS \geq dU - dL$ pe care o integrăm mai întâi, în condiții izoterme. Se obține:

$$-L \leq -\int_i^f dU + T\int_i^f dS = -(U_f - U_i) + TS_f - TS_i = (U_i - TS_i) - (U_f - TS_f) = -\Delta F$$

Această relație, arată că $-L_{max.} = -\Delta F = -(\Delta U - T_0\Delta S)$. Pentru un mol de gaz ideal, în cazul problemei $\Delta U = C_V(T_0 - T)$ și $\Delta S = C_V \ln\frac{T_0}{T}$. Rezultă: $-L_{max.} = C_V(T - T_0) + C_V T_0 \ln\frac{T_0}{T}$.

*

70.

1). În orice transformare izotermă $-L \leq -\Delta F$. Dacă transformarea e și izobară,

$$-L = \int pdV = p\int dV = p\Delta V = \Delta(pV) \Rightarrow \Delta(pV) \leq -\Delta F \Leftrightarrow \Delta(F + pV) = \Delta G \leq 0$$

Această relație arată că *în procese izobar – izoterme, entalpia liberă G descreşte, atingând o valoare minimă în starea de echilibru.*

2). Folosim inegalitatea fundamentală a termodinamicii:

$$TdS \geq dU + dL,\ dL = pdV + \sum X_i dx_i$$

în care $\sum X_i dx_i$ *reprezintă lucrul mecanic al altor forțe decât cele de presiune.*

$$dG = d(U + pV - TS) \leq -SdT + VdP + \sum X_i dx_i$$

din care rezultă că în procesele izobar-izoterme, $dG \leq -\sum X_i dx_i$, adică *variația entalpiei*

BCUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

libere reprezintă lucrul mecanic minim comunicat sistemului, de alte forțe decât forțele de presiune.

Inegalitatea $dG \le -\sum X_i dx_i$ este echivalentă cu $-dG \ge \sum X_i dx_i$ care evidențiază constatarea că *într-un proces izobar – izoterm, lucrul mecanic maxim efectuat de sistem, este egal cu variația dG a entalpiei libere luată cu semnul minus.* Aşadar,

$$-L_{max.} = -\Delta G = \Delta(U + p_0V - T_0S) = -(\Delta U + p_0\Delta V - T_0\Delta S) = p_0(V_2 - V_1) - T\int_{p_1}^{p_2}\frac{Vdp}{T} =$$

$$= -p_0\left(\frac{RT_0}{p_2} - \frac{RT_0}{p_1}\right) - T_0R\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = p_0RT_0\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) + RT_0\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

S-a ținut seama că în cazul uni mol de gaz ideal care evoluează într-un proces izoterm, $dU=0$, $pV=RT$ şi prin urmare, $pdV=-Vdp$.

*

71. Entalpia liberă G a unui gaz ideal rezultă din: $G = H - TS = G_0 + C_pT(1 - \ln T) + \nu RT\ln p$ în care, $G_0 = H_0 - TS_0$. Însă $\nu R = \frac{N}{N_A}R = Nk$, N fiind numărul de particule al sistemului, iar $k = \frac{R}{N_A}$ constanta Boltzmann.

Notând $f(T) \equiv [G_0 + C_pT(1 - \ln T)](Nk)^{-1}$ obținem $G = Nk[f(T) + T\ln p]$. Cum pentru o substanță pură $\mu = \frac{G}{N}$, *rezultă* $\mu = k[f(T) + T\ln p]$.

*

72.

1a). Din primele două egalități conținute în expresia din enunț, rezultă:

$$\lambda_v dV - \lambda_p dp = (C_p - C_v)\,dT \qquad (1)$$

Explicitând dT şi introducând în ultima egalitate, se obține:

$$dQ = \frac{\lambda_v C_p}{C_p - C_v}dV + \left(\lambda_p - \frac{\lambda_p C_p}{C_p - C_v}\right)dp$$

Din această relație, prin identificare se obțin expresiile pentru m_v *şi* m_p.

1b). Relațiile se obțin imediat din (1) prin derivare.

2). Avem, egalitățile: $TdS = C_vdT + \lambda_vdV = C_pdT + \lambda_pdp = m_vdV + m_pdp$

Dacă entropia S rămâne finită şi continuă când $T \to 0$, rezultă:

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_y = C_v\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_y + \lambda_v\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_y = \ldots \to 0$$

Alegând pe rând: $(x,y)=(T,V);\ (T,p);\ (V,T);\ (p,T);(V,p)$ *sau cu* (p, V), obținem: $C_v \to 0;\ C_p \to 0;\ \lambda_v \to 0;\ \lambda_p \to 0;\ m_v \to 0$ *şi* $m_p \to 0$

*

73. Observăm că pentru $T \to 0K$, energia internă U tinde către energia liberă F iar entalpia H tinde către entalpia liberă, G. Mărimile: $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$; $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ şi $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$ tind la zero odată cu temperatura.

*

74. Din $F=U-TS$, rezultă $\Delta F = \Delta U - T\Delta S$. Cum $\Delta U_T = \nu C_v\Delta T = 0$, rezultă:

$$\Delta S = -\frac{1}{T}\Delta F = -\frac{0{,}58\cdot 10^3}{290} = -2\frac{J}{K}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

75. Stabilirea primei ecuații Gibbs-Helmholtz urmează același procedeu ca cel folosit pentru a obține ecuația (2.168) pentru un sistem termodinamic simplu. Pentru a obține cealaltă relație, folosim ecuația Gibbs-Helmholtz dedusă din care rezultă:

$$\frac{U}{T^2}=-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\{a_i\}}+\frac{F}{T^2}=-\left[\frac{\partial\left(FT^{-1}\right)}{\partial T}\right]_{\{a_i\}} \text{ și}$$

$$\int_{T_0}^{T}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)_{\{a_i\}}dT=-\int_{T_0}^{T}\frac{U}{T^2}dT=\frac{1}{T}F(V,T,\{a_i\})-\frac{1}{T_0}F(V,T_0,\{a_i\})=-T\int_{T_0}^{T}\frac{U}{T^2}dT$$

echivalentă cu relația cerută.

*

76. Folosim relația: $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T=-p=-\frac{\nu RT}{V}\Rightarrow F(V_2,T)-F(V_1,T)=RT\ln(V_1/V_2)$ și relația $\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T=V=\frac{\nu RT}{p}$. Se obține: $G(p_2,T)-G(p_1,T)=RT\ln(p_2/p_1)$

*

77.

$$dG=d(H-TS)=dH-TdS-SdT=-TdS=-dQ$$

deoarece *procesul izoterm este și izoentalpic.*

*

78. Folosim relația (2.53) $C_p=C_V+\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ și ecuația: $T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p$

Se obține: $C_p-C_V=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$. Derivatele din paranteze le vom exprima din ecuațiile Maxwell (2.167) și (2.177): $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ și $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$.

Rezultă: $C_p-C_V=-T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$. Folosind expresiile: $S(T,V)=C_V\ln T+\nu R\ln V+const.$; $S(T,p)=C_p\ln T-\nu R\ln p+const$. obținute pentru gazul ideal, deducem: $C_p-C_V=R$.

*

79.

$$TdS=dU+pdV=dH-Vdp,$$

H fiind entalpia sistemului.

Rezultă: $dS=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT+\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T-V\right]dp$. Cum dS este diferențială totală exactă,

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p\right]=\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T-V\right]\right\}$$

care conduce la ecuația (1). În continuare, se ține seama că $H=U+pV$, $C_p=\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ și de relația (1). Se obține: $dS=C_p\frac{dT}{T}-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp=C_p\frac{dT}{T}-aV_0dp$. Rezultă: $S=S_0+C_V\ln T-aV_0p$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

80. Lucrul mecanic elementar efectuat împotriva forțelor de presiune, este: $dL = pdV$ care pentru un proces izobar conduce la expresia lucrului mecanic total: $L_p = p(V_2 - V_1)$ unde V_1 reprezintă volumul unui mol de apă, iar V_2 volumul unui mol de vapori .

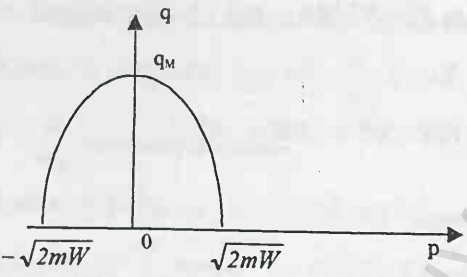
Deoarece $V_2 >> V_1$, $L = pV_2 = p\dfrac{RT}{p} = RT = 3{,}1MJ$ și $Q = m\lambda = \nu\mu\lambda$ cu $\nu = 1mol$.

Rezultă $Q = 18 \cdot 2{,}3 \cdot 10^8 = 41{,}4\,MJ$.

*

II.3 FIZICĂ STATISTICĂ

Alegem drept coordonată generalizată q, *înălțimea față de Pământ*. Considerăm energia mecanică totală: $W = \dfrac{p^2}{2m} + mgq = const.$ de unde,



$q = \dfrac{W}{mg} - \dfrac{p^2}{2m^2 g}$. Constanta W rezultă din condițiile inițiale, $W = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$.

Maximul curbei, se obține pentru $p = 0$:

$$q_M = \frac{W}{mg} = \frac{v_0^2}{2g} + h_0 .$$

*

2. Impulsul oscilatorului este $p = m\dot{q} = -m\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ astfel, că se poate scrie:

$$\begin{cases} \cos(\omega t + \varphi) = \dfrac{q}{A} \\ \sin(\omega t + \varphi) = -\dfrac{p}{m\omega A} \end{cases}$$

Și cum $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, (\forall)\alpha$, rezultă elipsa, $\dfrac{q^2}{A^2} + \dfrac{p^2}{m^2\omega^2 A^2} = 1$.

La $t = 0$, avem: $p_0 = -m\omega A \sin\varphi$, $q_0 = A\cos\varphi$ iar elementul de volum este $\Omega_0 = \iint dp_0 dq_0$.

La un moment oarecare t, $\Omega = \iint dpdq = \iint \dfrac{\partial(p,q)}{\partial(p_0,q_0)} dp_0 dq_0$ .Folosind relațiile de mai sus, obținem: $p = -(m\omega \sin\omega t)q_0 + p_0 \cos\omega t$, $q = q_0 \cos\omega t + \dfrac{p_0}{m\omega}\sin\omega t$ și

$$\frac{\partial(p,q)}{\partial(p_0,q_0)} = \begin{vmatrix} \cos\omega t & -m\omega \sin\omega t \\ \dfrac{1}{m\omega}\sin\omega t & \cos\omega t \end{vmatrix} = 1$$

*

3.

a) Scriem impulsul corespunzător coordonatei q :

$$p = m\dot{q} = -mA\left[\lambda e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) + \omega e^{-\lambda t}\sin(\omega t + \varphi)\right] = -m\lambda q - mAe^{-\lambda t}\omega\sqrt{1 - \frac{q^2}{A^2 e^{-2\lambda t}}} .$$

Se obține: $(p + m\lambda q)^2 + (m\omega q)^2 = mA^2\omega^2 e^{-2\lambda t}$.

Această ecuație reprezintă o elice eliptică prezentată în figura de pe verso.

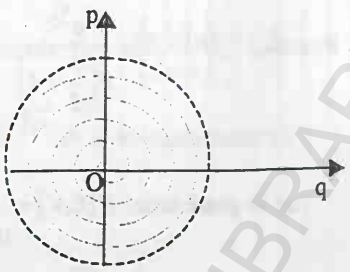
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b). Condițiile inițiale presupun la $t=0$:

$$q_0 = A\cos\varphi$$

$$p_0 = -mA[\lambda\cos\varphi + \omega\sin\varphi]$$

Cum $\lambda << \mu$, $p_0 = -m\omega A\cos\varphi$. Rezultă prin considerarea acestor relații, $q = e^{-\lambda t}\left(q_0\cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega}\sin\omega t\right)$. În aproximația $\lambda << \mu$, se obține $p = me^{-\lambda t}\left(\frac{p_0}{m}\cos\omega t - q_0\omega\sin\omega t\right)$.



Volumul din spațiul fazelor, rezultă a fi: $\Omega(t) = \iint dpdq = \iint \frac{\partial(p,q)}{\partial(p_0,q_0)}dp_0dq_0$

unde $\frac{\partial(p,q)}{\partial(p_0,q_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial p_0} & \frac{\partial q}{\partial p_0} \\ \frac{\partial p}{\partial q_0} & \frac{\partial q}{\partial q_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\lambda t}\cos\omega t & \frac{e^{-\lambda t}}{m\omega}\sin\omega t \\ -m\omega e^{-\lambda t}\sin\omega t & e^{-\lambda t}\cos\omega t \end{vmatrix} = e^{-2\lambda t}$ reprezintă jacobianul transformării. Se obține: $\Omega(t) = e^{-2\lambda t}\Omega_0$, $\Omega_0 = \iint dp_0dq_0$ fiind volumul ocupat de sistem în spațiul fazelor la momentul inițial. Relația exprimă faptul că în acest caz teorema lui Liouville nu se mai verifică volumul Ω_0 reducându-se exponențial în timp.

*

4. Ecuația sferei n dimensionale de rază R cu centrul în origine, este: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = R^2$. Volumul acestei sfere rezultă din: $V_n(R) = \int\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x_n^2\le R^2} \ldots\ldots dx_1 \cdot dx_2 \cdot \ldots\ldots \cdot dx_n$. Cu schimbarea de variabile $x_i = y_i \cdot R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se obține:

$V_n(R) = R^N V_n(1)$ *unde* $V_n(1) = \int\limits_{y_1^2+y_2^2+\ldots\ldots+y_n^2\le 1} \ldots\ldots dy_1 \cdot dy_2 \cdot \ldots\ldots \cdot dy_n$

$$V_n(1) = \int_{-1}^{1} dy_1 \left(\int\limits_{y_1^2+y_2^2+\ldots\ldots+y_n^2\le 1-y_1^2} \ldots\ldots dy_1 \cdot dy_2 \cdot \ldots\ldots \cdot dy_n \right) =$$

$$= \int_{-1}^{1} dy_1 V_{n-1}\left(\sqrt{1-y_1^2}\right) = \int_{-1}^{1} \left(1-y_1^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dy_1 V_{n-1}(1) = V_{n-1}(1)B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

Aici B este ***funcția "beta"*** a lui Euler

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad (a>0, b>0)$$

iar $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ $(a>0)$ este ***funcția "gamma"***.

Se obține: $V_n(1) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} V_{n-1}(1)$. Aplicăm succesiv această relație de recurență:

$$V_n(1) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \ldots\ldots V_1(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \quad \Gamma(1) = 1$$

BCU MS / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultă, $V_n(R) = R^n \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

*

5.

a). Se poate scrie: $\Gamma(E,V) = \int\limits_{(H\le E)} .....\int d\Omega = V^N \cdot \int .....\int dp_x dp_y dp_z$ .....Domeniul de integrare în subspaţiul impulsurilor, rezultă din condiţia $H = \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{2m}\left(p_{x_K}^2 + p_{y_K}^2 + p_{z_K}^2\right) \le E$ şi este o sferă cu raza $R = \sqrt{2mE}$ şi volumul proporţional cu R^{3N}.

Deci: $\Gamma(E,V) = A_N V^N E^{3N/2}$ în care constanta A_N nu depinde de volum şi de energie.

b). $S = k \ln \Gamma(E,V) = k \ln A_N + kN \ln V + \frac{3}{2} kN \ln E$.

c). $T = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1} = \frac{2}{3k} \cdot \frac{E}{N}$ din care, $E = \frac{3NkT}{2}$.

d). $p = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E = \frac{kNT}{V}$.

*

6

$$Z_c = \frac{1}{h^{3N}} \int exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dx_1 dx_2 ... dx_{3N} dp_1 dp_2 ... dp_{3N} =$$

$$= V^N \cdot \frac{1}{h^{3N}} \left(\int_0^\infty exp\left[-\frac{pc}{kT}\right] p^2 dp \right)^N \cdot (4\pi)^N = \left[\left(\frac{kT}{c}\right)^3 \cdot \frac{4\pi V}{h^3} \right]^N$$

$$F = -kT \ln Z_c$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = kT \frac{\partial \ln Z_c}{\partial V}$$

$$\ln Z_c = N\left[\ln V + 3 \ln T + \ln \frac{4\pi k^3}{c^3 h^3} \right]$$

$$p = \frac{NkT}{V} \quad \text{şi} \quad U = NkT^2 \frac{\partial \ln Z_c}{\partial T} = 3NkT$$

*

7

a) Restricţiile impuse în problemă vizând numărul moleculelor *din unitatea de volum, în unitatea de timp, pe unitatea de arie* şi cu *viteza cuprinsă între valorile v şi v+dv*, presupun folosirea distribuţiei Maxwell după valoarea absolută a vitezelor. Rezultă că numărul moleculelor din unitatea de volum care părăsesc cuptorul în unitatea de timp pe unitatea de arie şi pentru care viteza are valoarea cuprinsă între v şi $v+dv$ este:

$$dn = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} n \pi e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin integrarea acestei relații se obține numărul total de molecule $N_0 = n\left(\frac{kT}{2m\pi}\right)^{1/2} = \frac{n\bar{v}}{4}$.

b) $E_c = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}m\int_0^\infty v^2\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}m\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot\int_0^\infty v^5 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv$ și folosind integrala

$I = \int_0^\infty v^5 e^{-Av^2}dv = \frac{1}{A^3}$, *rezultă* $\overline{E}_c = 2kT$.

În interiorul cuptorului energia cinetică medie a moleculelor, este: $\overline{E_c'} = \frac{3}{2}kT < \overline{E}_c$.

c) Se anulează derivata lui n în raport cu v și se găsește $v_p = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2}$, în timp ce în interiorul cuptorului, viteza cea mai probabilă este dată de relația $v_p' = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$.

*

8.

a) Molecula va părăsi lichidul când energia cinetică a moleculei este mai mare decât lucrul mecanic L necesar pentru a îndepărta la infinit molecula din lichid. Considerând ca axă Ox direcția normalei la suprafața lichidului, scriem $\frac{1}{2}mv_x^2 > L$.

Numărul de molecule care au componenta x a vitezei cuprinsă în intervalul v_x, v_x+dv_x este $dn = n\mathcal{P}(v_x)dv_x$ în care $\mathcal{P}(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}$. Considerând că aceste molecule au aceeași viteză v_x, numărul de ciocniri în care se implică aceste molecule în unitatea de timp rezultă din $dN = dn\cdot v_x = nf(v_x)v_{x_c}dv_x$ iar numărul de molecule ce părăsesc unitatea de arie a suprafeței libere a lichidului în unitatea de timp, se va obține prin integrare:

$$N_1 = \int_{v_x=\left(\frac{2L}{m}\right)^{1/2}}^{v_x=\infty} dN = n\int_{\left(\frac{2L}{m}\right)^{1/2}}^{\infty}\mathcal{P}(v_x)dv_x = n\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2} e^{-\frac{L}{kT}}$$

b) Numărul moleculelor N_2 care se introduc în lichid din stare de vapori este proporțional cu presiunea p a vaporilor saturanți. La echilibru statistic, $N_1 = N_2$. Cum

$$N_1 = C_1\sqrt{T}e^{-\frac{L}{kT}}$$
$$N_2 = C_2 p$$

rezultă $p = C\sqrt{T}e^{-\frac{E}{kT}}$.

*

9.

a) În cazul unui gaz ideal, energia potențială a moleculelor sale este nulă și prin integrarea elementelor de volum pentru cele N_A molecule se obține un factor constant V^{N_A}. Rămâne integrarea după impulsuri ce trebuie calculată pentru valorile impulsurilor ce conduc la o energie cel mult egală cu E, $\sum_{i=1}^{N} p_i \le const\cdot E$. În spațiul impulsurilor, aceste puncte sunt situate în interiorul unei sfere de rază egală cu membrul drept al acestei inegalități și volum proporțional

BUCUREȘTI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu puterea a treia a acestei raze. Presupunând că volumul delimitat în spațiul fazelor de suprafață de energie constantă E este $\Omega(E)$, obținem: $\Omega(E) = const \cdot V^{N_A} E^{3N_A}$.

În continuare, folosim relația lui Boltzmann $S = k \ln \Omega(E) = const. + kN_A \ln V + 3kN_A \ln E$.

și întrucât $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$; $E = 3N_A kT$ obținem: $C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = 3kN_A = 3R$.

b) Se folosește integrala statistică de stare $Z = V^N \int ... \int e^{-\frac{c}{kT}\sum p_i} d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2} ... d\Omega_{p_n}$

unde $d\Omega_p$ reprezintă elementul de volum în spațiul impulsurilor. Cum $d\Omega_p = 4\pi p^2 dp$, integrala după impulsuri se compune din produsul a N_A integrale de forma: $I = 4\pi \int_0^\infty e^{-\frac{c \cdot p}{kT}} \cdot 4\pi p^2 dp$.

Cu sustituția $\frac{c}{kT} = \alpha$ și schimbarea de variabilă $p = x^2$ integrala devine:

$$I = 4\pi \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^5 dx = 4\pi \left(\frac{kT}{c}\right)^3$$

iar integrala statistică se scrie, $Z = V^N (4\pi)^N \left(\frac{kT}{c}\right)^{3N} = ct \cdot V^N \cdot T^{3N}$ rezultând expresia pentru energia liberă $F = -kT \ln Z = NkT \ln\left(ct \cdot V \cdot T^3\right)$.

Întrucât $c_V = -T \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$, rezultă $c_V = 3Nk$ valoare de două ori mai mare decât în cazul gazului monoatomic nerelativist și reprezintă *căldura specifică molară a unui corp cristalin*.

*

10. Molecula de gaz ideal poate fi considerată ca un sistem cvasiizolat pentru care energia $E(p,q)$ a sistemului este chiar energia unei molecule. Pentru $N=1$ molecula are trei grade de libertate de translație și deci spațiul fazelor are șase dimensiuni, elementul de volum din spațiul fazelor fiind: $d\Gamma = dp_x dp_y dp_z dxdydz$. Vom considera $dxdydz = dV$ și vom exprima impulsurile în coordonate sferice.

Elementul de volum din spațiul fazelor devine: $d\Gamma = p^2 \cdot dp \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot dV \cdot d\varphi$. În absența vreunui câmp de forțe exterior energia moleculei este pur cinetică $E(p,q) = \frac{p^2}{2m}$ și nu depinde de direcția de mișcare (unghiurile θ și φ) sau de poziția sa în recipient.

Astfel, energiei cuprinsă în intervalul E, $E+dE$ îi corespunde un număr de stări egal cu:

$$d\Omega = p^2 dp dV \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 4\pi V p^2 dp .$$

Din $p = \sqrt{2mE}$, rezultă: $d\Omega = 4\pi V (2m)^{3/2} E^{1/2} dE$. Distribuția canonică a stărilor unei singure molecule va fi descrisă de funcția: $d\mathcal{P} = \frac{4\pi V (2m)^{3/2}}{Z_c} exp\left[-\frac{E}{kT}\right] E^{1/2} dE$.

Funcția de partiție Z_c pentru o singură moleculă este:

$$Z_c = \int_0^\infty exp\left[-\frac{E}{kT}\right] d\Omega = 4\pi (2m)^{3/2} V \int_0^\infty exp\left[-\frac{E}{kT}\right] E^{1/2} dE$$

Cu schimbarea de variabilă $E = x^2$,

$$Z_c = 4\pi (2m)^{3/2} V \int_0^\infty exp\left[-\frac{x^2}{kT}\right] x^2 dx = 4\pi (2m)^{3/2} V \sqrt{\pi} \frac{(kT)^{3/2}}{4} = (2\pi mkT)^{3/2} V$$

Cu această expresie a sumei de stare, se poate scrie distribuția cerută:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$d\mathcal{P} = \frac{4\pi}{(\pi KT)^{3/2}} exp\left[-\frac{E}{kT}\right] E^{1/2} dE$$

*

11. Hamiltoniana gazului ideal, se scrie: $H = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{p_i^2}{2m} + U\left(\vec{r}_i\right)\right]$

iar distribuția canonică este exprimată prin relația (3.77):

$$\mathcal{P}\left(\vec{p},\vec{q}\right) = const. \cdot e^{-\frac{H}{kT}} = const. \cdot exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2mkT} - \frac{1}{kT}\sum_{i=1}^{N}U\left(\vec{r}_i\right)\right]$$

Integrăm după toate variabilele canonice cu excepția acelora care caracterizează particula *i* a sistemului. Se realizează astfel trecerea de la spațiul fazelor Γ la spațiul unei singure particule, când $\mathcal{P}\left(\vec{p}_i,\vec{q}_i\right) = A_i\, exp\left(-\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2mkT} - \frac{U\left(\vec{r}_i\right)}{kT}\right)$, $A_i = const.$

Rezultă distribuția simultană a tuturor particulelor după coordonate și impulsuri

$$\mathcal{P}\left(\vec{p},\vec{r}\right) = A\, exp\left(-\frac{p^2}{2mkT} - \frac{U\left(\vec{r}\right)}{kT}\right) \quad cu \quad A = const.$$

Pentru a obține distribuția doar după coordonate, aplicăm legea de adunare a probabilităților integrând această relație în raport cu impulsurile. Se obține:

$\mathcal{P}(\vec{r}) = \iiint \mathcal{P}\left(\vec{p},\vec{r}\right) d\vec{p}$ din care rezultă $\mathcal{P}(\vec{r})\, d\vec{r} = const. \cdot exp\left(-\frac{U\left(\vec{r}\right)}{KT}\right) d\vec{r}$.

*

12. Se consideră relațiile: $S_0 = k \ln P_0$, $S_1 = k \ln P_1$ $\Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = e^{\frac{S_0 - S_1}{k}}$, S_0 și S_1 fiind entropiile sistemului în stările de echilibru , respectiv de dezechilibru.

$$S_0 = S_0' + S_0'' = 2C_v \ln T + 2R \ln V + 2S_r \quad , \quad T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$S_1 = S_1' + S_1'' = C_v \ln T_1 + R \ln V + S_r + C_v \ln T_2 + R \ln V + S_r =$$

$$= C_v \ln T_1 T_2 + 2R \ln V + 2S_r$$

$$S_0 - S_1 = 2C_v \ln T - C_v \ln T_1 T_2 = C_v\left(2 \ln T - \ln T_1 T_2\right) =$$

$$= C_v\left(\ln T^2 - \ln T_1 T_2\right) = C_v \ln \frac{T^2}{T_1 T_2}$$

Se obține:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_0}{P_1} &= exp\left[\frac{C_v}{k} \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}\right] \\ C_v &= \frac{3}{2}R = \frac{3}{2}kN_A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P_0}{P_1} = exp \ln\left[\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}\right]^{\frac{3}{2}N_A} = \left[\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}\right]^{\frac{3}{2}N_A}$$

Cum $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}\, Kmol^{-1}$, rezultă $P_0 >> P_1$.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

13. Folosim (3.86) şi calculăm: $\frac{dZ_c}{dT} = \frac{1}{kT^2}\int H \cdot e^{-\frac{H}{kT}} d\Omega$ de unde rezultă:

$$\int H \cdot e^{-\frac{H}{kT}} d\Omega = kT^2 \frac{dZ_c}{dT} \text{ şi } U = \overline{H} = \frac{\int H \cdot e^{-\frac{H}{kT}} d\Omega}{\int e^{-\frac{H}{kT}} d\Omega} = \frac{1}{Z_c}\frac{dZ_c}{dT} = \frac{d(\ln Z_c)}{dT}\frac{1}{Z_c}$$

Obţinem: $U = kT^2 \frac{d\ln Z_c}{dT}$ *sau* $U = NkT^2 \frac{d\ln Z_c}{dT}$ pentru un sistem alcătuit din N particule.

*

14.

a). Folosim (3.149):

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

$$\overline{E}_c = \frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{m}{2}\overline{v^2} = \frac{m}{2}\frac{3kT}{m} = \frac{3}{2}kT$$

b). $\overline{E_c^2} = \frac{m^2}{4}\overline{v^4} = \frac{m^2}{4} \cdot 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^6 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$, expresie care are în vedere relaţia de recurenţă pentru integralele Poisson: $I_n = \frac{n-1}{2\alpha} I_{n-2}$, $n \geq 2$ cu $\alpha = \frac{m}{2kT}$; $I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Se obţine $I_6 = \int_0^\infty v^6 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{5}{2\alpha} I_4 = \frac{5}{2\alpha}\frac{3}{2\alpha} I_2 = \frac{15}{4\alpha^2}\frac{1}{2\alpha} I_0$. Rezultă $\overline{E_c^2} = \frac{15}{4}k^2T^2$.

c). $\overline{E_c^2} - \left(\overline{E}_c\right)^2 = \frac{15}{4}k^2T^2 - \frac{9}{4}k^2T^2 = \frac{3}{2}k^2T^2$

*

15. Datorită fluctuaţiilor termice ale căror mărimi fizice ce caracterizează mecanismul balanţei şi variaţiile presiunii aerului înconjurător, valoarea măsurată a masei variază haotic în jurul unei valori medii.

Masa minimă ce poate fi apreciată cu ajutorul balanţei este aceea pentru care alungirea firului nu este mai mică decât abaterea pătratică medie $\sqrt{\overline{x^2}}$: $mg = K\sqrt{\overline{x^2}}$ .Fie dP probabilitatea ca lungimea firului să varieze cu dx .Avem: $\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dP$, *unde* $dP = C \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}} dx$ *iar* $E_p = \frac{Kx^2}{2}$.

Impunând condiţia de normare $\int_{-\infty}^{\infty} dP = 1$ se obţine constanta de normare: $C = \sqrt{\frac{K}{2\pi kT}}$.

Rezultă $\overline{x^2} = \sqrt{\frac{K}{2\pi kT}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{Kx^2}{2kT}} dx$ şi cum $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ se obţine: $\overline{x^2} = \frac{kT}{K}$ şi $mg = K\sqrt{\frac{kT}{K}}$, din care rezultă $m = \frac{\sqrt{kKT}}{g} = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ *Kg.*

*

16.

a). Maximul distribuţiei maxwelliene are loc pentru viteza cea mai probabilă, v_p şi are va-

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

loarea $f_{max} = \frac{4}{e\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{v_p} = \frac{0,83}{v_p}$ echivalentă cu $f_{max} \cdot v_p = 0,83$.

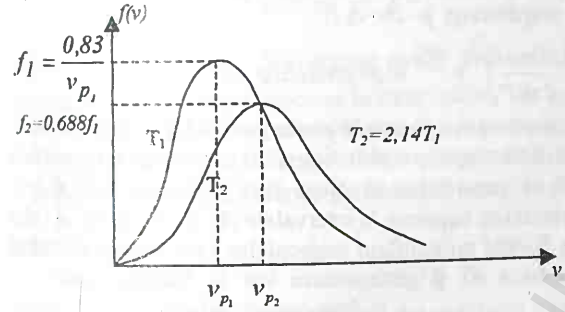
Rezultă aşadar că aceste maxime se distribuie pe o hiperbolă de ecuaţie $y = \frac{0,83}{x}$;

b). Punem condiţia ca cele două curbe de distribuţie să se intersecteze:

$$T_1^{-3/2} e^{-mv^2/2kT_1} = T_2^{-\frac{3}{2}} e^{-mv^2/2kT_2}.$$

Rezultă, $v^2 = \frac{3k \ln \frac{T_2}{T_1}}{m\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} = v_{c.m.p}^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\ln \frac{T_2}{T_1}}{\frac{T_2}{T_1} - 1}$.

c).Punem condiţia ca intersecţia să se producă pentru $v = v_p$.



Se obţine ecuaţia: $1 = \frac{3}{2} \frac{\ln(T_2/T_1)}{\frac{T_2}{T_1} - 1}$ cu o primă soluţie $T_1 = T_2$ şi o alta $\frac{T_2}{T_1} = 2,14$.

Raportul maximelor corespunzătoare este:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{0,83}{v_{p_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{1}{\sqrt{2,14}} = 0,688.$$

Rezultă aşadar că al doilea punct de intersecţie dintre curba maximelor şi o curbă de distribuţie are loc pentru viteza $v = \sqrt{\frac{2kT \cdot 2,14}{m}} = 1,45 v_p$ care conferă funcţiei de distribuţie valoarea: $f = 0,688 f_{max}$.

*

17. Probabilitatea ca o moleculă să se găsească la o înălţime cuprinsă în intervalul z, $z+dz$ şi să aibă viteza cuprinsă în volumul elementar $dv_x dv_y dv_z$ centrat pe v, este:

$$d\mathcal{P} = A \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] dv_x dv_y dv_z \exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right] dz$$

Constanta A se determină din condiţia de normare $\int_0^\infty d\mathcal{P} = 1$.

$$A \int_0^\infty \exp\left[-\frac{mv_x^2}{2kT}\right] dv_x \int_0^\infty \exp\left[-\frac{mv_y^2}{2kT}\right] dv_y \int_0^\infty \exp\left[-\frac{mv_z^2}{2kT}\right] dv_z \times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right] dz = 1$$

Integralele succesive din această relaţie au valorile

$$\int_0^\infty \exp\left[-\frac{mv_x^2}{2kT}\right] dv_x = \int_0^\infty \exp\left[-\frac{mv_y^2}{2kT}\right] dv_y = \int_0^\infty \exp\left[-\frac{mv_z^2}{2kT}\right] dv_z = \left(\frac{\pi kT}{2m}\right)^{1/2} \text{ şi}$$

$$\int_0^\infty \exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right] dz = \frac{kT}{mg}.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se obține, $A\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2}\cdot\frac{kT}{mg}=1$ din care rezultă: $A=16g\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{5/2}$ Acum se poate scrie expresia finală a probabilității căutate:

$$d\mathcal{P}=16g\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{5/2}exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]dv_x dv_y dv_z\, exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right]dz.$$

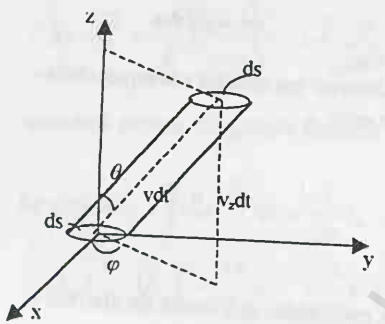
*

18. În virtutea distribuției Maxwell, numărul moleculelor având componentele vitezelor cuprinse între (v_x, v_x+dv_x), (v_y, v_y+dv_y) și (v_z, v_z+dv_z) este:

$$dn(v_x,v_y,v_z)=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv_x dv_y dv_z=\frac{n}{4\pi}f(v)dv$$ .Exprimăm elementul de volum în *coordonate sferice* v,θ și φ: $dv_x dv_y dv_z=v^2 dv\sin\theta d\theta d\varphi$.

Deci numărul $dn\ (v,\theta,\varphi)$ de molecule având viteza cuprinsă între v și $v+dv$ și orientarea în interiorul unghiurilor sferice θ și $\theta+d\theta$, respectiv φ, $\varphi+d\varphi$ va fi:

$$dn(v,\theta,\varphi)=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2 dv\sin\theta d\theta d\varphi$$



Considerăm normala la perete ca axă OZ. Numărul moleculelor care lovesc în timpul dt elementul de suprafață dS al peretelui și au viteza $\vec{v}$ în intervalul $(v,v+dv)$ cu orientarea cuprinsă în intervalele $(\theta, \theta+d\theta)$,și $(\varphi, \varphi+d\varphi)$ va fi egal cu numărul moleculelor care umplu cilindrul cu baza dS și generatoarea vdt de înălțime $v_z dt$:

$v_z dt=v\cos\theta dt$; adică:

$dn(v,\theta,\varphi)\ dSv\cos\theta\ dt= n f(v)\ dv\ \sin\theta\ d\theta d\varphi dSv\cos\theta\ dt.$

Dintre aceste molecule $dN(v,\theta,\varphi)$ lovesc unitatea de arie a peretelui în unitatea de timp și au modulul vitezei cuprins între v și $v+dv$, se va obține integrând pentru $\theta\in[0,\pi/2]$ și $\varphi\in[0,2\pi]$:

$$dN(v)=\frac{n}{4\pi}f(v)dv\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{n}{4}vf(v)dv=n\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^3dv$$

Integrăm după v și obținem: $N=n\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^v e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^3dv=\frac{1}{4}n\bar{v}=n\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}=\frac{p}{\sqrt{2\pi mkT}}$

p fiind presiunea gazului.Energia cinetică de translație dE_c a celor $dN(v)$ molecule, va fi:

$$dN(v)\frac{mv^2}{2}=\frac{1}{8}nmf(v)v^3dv=\frac{1}{8}\rho f(v)v^3dv$$

În care $\rho=nm$ reprezintă densitatea gazului. Prin însumarea contribuțiilor tuturor moleculelor se obține $E_c=\frac{1}{8}\rho\overline{v^2}=\frac{1}{8}4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^5e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv$ sau $E_c=8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{kT}{m}\right)^{3/2}$.

*

19. În cazul gazului ideal, energia de interacțiune între molecule este nulă și energia totală a gazului este de natură pur cinetică: $H=\sum_{i=1}^{3N}\frac{p_i^2}{2m}$.

Probabilitatea ca molecula – să zicem notată cu 1 – să aibă componentele p_1,p_2,p_3 ale impulsului cuprinse între (p_1,p_1+dp_1), (p_2,p_2+dp_2) și (p_3,p_3+dp_3) indiferent de situația celorlalte $N-1$ molecule, este:

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\mathcal{P}dp_1dp_2dp_3 = \frac{1}{Z}e^{-\frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2mkT}}dp_1dp_2dp_3 \text{ în care}$$

$$Z = \int\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2mkT}}dp_1dp_2dp_3$$

Integrala triplă se descompune în trei integrale simple de forma: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u}du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\alpha = \frac{1}{2mkT}$.

Se obține $Z = (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}$ astfel că probabilitatea, devine:

$$\mathcal{P}dp_1dp_2dp_3 = (2\pi mkT)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2mkT}}dp_1dp_2dp_3$$

sau exprimată în funcție de viteze:

$$\mathcal{P}dv_1dv_2dv_3 = \left(\frac{m}{2\pi mkT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv_1dv_2dv_3$$

unde $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$. S-a obținut astfel probabilitatea ca viteza v a moleculei 1 să aibă componentele cu valori cuprinse în intervalele (v_1, v_1+dv_1), (v_2, v_2+dv_2) și (v_3, v_3+dv_3).

Pentru a obține probabilitatea $f(v)dv$ ca mărimea vitezei v să fie cuprinsă între v și $v+dv$ indiferent de orientare, se obține exprimând volumul elementar $dv_1dv_2dv_3$ din spațiul vitezelor în coordonate sferice și efectuând apoi integrarea după toate unghiurile θ și φ:

$$f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dv\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

din care rezultă funcția de distribuție maxwelliană a vitezelor.

$$f(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dv$$

*

20. Calculăm mai întâi înălțimea minimă h_0 la care energia potențială gravitațională mgh_0 este egală cu energia cinetică medie de translație $\overline{E}_c = \frac{3}{2}kT$. Se obține $h_0 = \frac{3kT}{2mg}$.

Numărul dn de molecule situate între cotele h și $h+dh$, este $dn = nCe^{-\frac{mgh}{kT}}dh$.

Deci $q = \frac{dn}{n} = C\int_{h_0}^{\infty}e^{-\frac{mgh}{kT}}dh$. Constanta C rezultă din condiția de normare: $C = \left[\int_0^{\infty}e^{-\frac{mgh}{kT}}dh\right]^{-1}$

Rezultă $q = \frac{\int_{h_0}^{\infty}e^{-\frac{mgh}{kT}}dh}{\int_0^{\infty}e^{-\frac{mgh}{kT}}dh} = e^{-\frac{3}{2}} = 22{,}3\%$.

*

21.

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty}v^2f(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^{\infty}v^4e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv.$$

Apare o integrală de tip Poisson de forma: $I_{2\beta} = \int_0^{\infty}x^{2\beta}e^{-\alpha x^2}dx = \frac{(2\beta-1)!!}{2^{\beta+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2\beta+1}}}$

BCU IAȘI - CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

care pentru $\beta = 2$ şi $\alpha = \frac{m}{2kT}$, conduce la: $\int_0^\infty v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$

Se obţine: $\overline{v^2} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\pi^{1/2}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{-\frac{5}{2}} = 3\frac{kT}{m} = 3\frac{RT}{\mu}$

*

22. $\overline{v^n} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^{n+2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)$

Pentru $n = 2\beta$, $\overline{v^{2\beta}} = \left(\frac{kT}{m}\right)^\beta (2\beta+1)!!$ iar pentru $n = 2\beta+1$, $\overline{v^{2\beta+1}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{2\beta+1/2}(\beta+1)!$

*

23. Se procedează analog ca în problema anterioară.

*

24. În coordonate sferice, $d\Omega = sin^2\theta d\theta d\varphi$ şi distribuţia de probabilitate dP devine:

$$dP = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv d\Omega$$

Integrând după modul vitezei se obţine distribuţia după unghiul solid:

$$dP(\Omega) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv\right) d\Omega$$

Pentru a evalua integrala, apelăm la integrala: $\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!\frac{1}{a^{\frac{2n+1}{2}}}$

Considerând $a = \frac{m}{2kT}$ şi $n=1$, se obţine $\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}$ astfel că:

$$dP = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} d\Omega = \frac{1}{4\pi} d\Omega$$

*

25.

a). Folosim în această situaţie funcţia de distribuţie moleculelor după valoarea absolută a vitezelor exprimată prin (3.149). $dN(v) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$. Se obţine prin integrare, $N(v < \bar{v}) = \int_0^{\bar{v}} dN(v) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^{\bar{v}} v^2 exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$, *în care* $\bar{v} = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}$.

Cu schimbarea de variabilă $y^2 = \frac{mv^2}{2kT}$ şi ţinând seama de definiţia ***funcţiei erorilor*** $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt$, se găseşte pentru fracţiunea cerută $N_r(v < \bar{v}) = \frac{N(v < \bar{v})}{N}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$N_r\left(v<\bar{v}\right)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1,13}y^2e^{-y}dy=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left[-y\frac{e^{-y^2}}{2}\Bigg|_0^{1,13}+\frac{1}{2}\int_0^{1,13}e^{-y^2}dy\right]=$$

$$=-0,35+0,89=0,54=54\%$$

b). Procedând la un calcul similar $N_r\left(v>v_p\right)\cong 0,57=57\%$ *unde* $v_p=\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$, v_p fiind viteza cea mai probabilă.

c). Reluând acelaşi procedeu de calcul şi ţinând seama că $\bar{\varepsilon}=\frac{3kT}{2}$ se obţine:

$$N_r\left(\varepsilon>\bar{\varepsilon}\right)\cong 0,39=39\%$$

*

26. Numărul particulelor gazului cu componentele vitezelor în intervalele dv_x, dv_y şi dv_z rezultă din distribuţia Maxwell: $dN=N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}}\bar{dv}$ unde s-a notat $\bar{dv}=dv_x\cdot dv_y\cdot dv_z$.

Masa unei molecule de oxigen este $m=\frac{\mu}{N_A}=\frac{32Kg\cdot Kmol^{-1}}{6,023\cdot 10^{26}Kmol^{-1}}=5,316\cdot 10^{-26}Kg$

Numărul de molecule dintr-un mm^3, este: $N=\nu\cdot N_A=\frac{pV}{RT}N_A=4,74\cdot 10^{16}$ molecule pe mm^3.

Rezultă: $\frac{m}{2kT}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)=2,13$ astfel că, $exp\left(-\frac{m}{2kT}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\right)=exp(-2,13)=0,118.$

Se obţine: $dN=N\cdot e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\bar{dv}=1,63\cdot 10^8$ *particule*.

*

27. Folosim legea distribuţiei maxwelliene a vitezelor $\frac{dN}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}v^2\,exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$

obţinem:

$$exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)=exp\left(-\frac{\mu v^2}{2N_AkT}\right)=exp\left(-\frac{\mu v^2}{2RT}\right)=$$

$$=exp\left(-\frac{28,013\cdot(250)^2}{2\cdot 8,31\cdot 10^3\cdot 273,16}\right)=exp(-0,386)=0,679$$

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}v^2dv=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mu}{2RT}\right)^{3/2}v^2dv=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3,14}}\left(\frac{28,013}{2\cdot 8,31\cdot 10^3\cdot 273,16}\right)^{3/2}250^2\cdot 10=0,0216$$

Rezultă: $\frac{dN}{N}=0,0216\cdot 0,679=0,0147$

*

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

28.

a).Se integrează distribuția Maxwell pentru componentele x ale vitezelor mai mici de *500* m/s.

$$N\left(v_x < 500\frac{m}{s}\right) = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\int_0^{500} exp\left(-a^2v_x^2\right)dv_x$$

N fiind numărul total de molecule, m masa unei molecule iar $a = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}$.

Cu substituția $y = av_x$ rezultă $N\left(v_x < 500\frac{m}{s}\right) = \frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_0^{500} e^{-y^2}dy = \frac{N}{2}erf(500a)$.

În cazul hidrogenului, $m = \frac{\mu}{N_A} = \frac{2{,}02}{6{,}02\cdot 10^{-26}} = 3{,}3\cdot 10^{-27}\,Kg\cdot mol$. Cum $a = 4{,}93\cdot 10^{-4}$, $500a = 0{,}247$. Se obține: $N\left(v_x < 500\frac{m}{s}\right) = 0{,}82\cdot 10^{26}\,molecule/Kmol.$

b).Folosim distribuția Maxwell după valorile absolute ale vitezelor:

$$dN = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\,exp\left(-a^2v^2\right)dv$$

Integrând prin părți cu substituția $y = av$,

$$N(v < v_0) = 4\pi^{-\frac{1}{2}}N\int_0^{y_0} y^2\,exp\left(-y^2\right)dy = 4\pi^{-\frac{1}{2}}N\left[-\frac{y}{2}e^{-y^2}\Big|_0^{y_0} + \frac{1}{2}\int_0^{y_0} exp\left(-y^2\right)dy\right] =$$

$$= N\cdot erf(y_0) - 2\pi^{-\frac{1}{2}}Ny_0\,exp\left(-y_0^2\right) \quad unde \quad y_0 = av_0 = 0{,}493$$

Rezultă:

$$N(v < v_0) = N\left[erf(0{,}493) - 2\pi^{-\frac{1}{2}}\cdot 0{,}493\cdot e^{-(0.493)^2}\right] \cong 0{,}48\cdot 10^{26}\,molecule.Kmol.^{-1}$$

unde s-a ținut seama că $N = N_A\cdot 10^3 = 6{,}02\cdot 10^{26}\,Kg\cdot mol^{-1}$.

c). $N(v > v_0) = N - N(v < v_0) = N\left[1 - erf(y_0) + 2\pi^{-\frac{1}{2}}y_0\,exp\left(-y_0^2\right)\right]$.

*

29. Numărul de particule cu mărimea vitezei cuprinsă între v și $v + dv$ este:

$$dN = C\cdot exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2dv \quad , \quad C = const.$$

Observăm că energiei kT îi corespunde viteza $\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$, astfel că numărul de particule cu energia $\varepsilon < kT$ (respectiv kT) rezultă a fi:

$$N(\varepsilon < kT) = C\int_0^{\sqrt{\frac{2kT}{m}}} exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2dv = C'\int_0^1 y^2e^{-y^2}dy$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$N(\varepsilon > kT) = C' \int_{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}^{\infty} exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv = C' \int_{1}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy$$

Se obține: $\frac{N(\varepsilon < kT)}{N(\varepsilon > kT)} = \frac{\int_0^1 y^2 e^{-y^2} dy}{\int_1^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy}$ și $N(\varepsilon < kT) + N(\varepsilon > kT) = C' \int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4} C'$.

Cum $\int_1^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-1} - \frac{1}{2} erf(1)\right]$ și $\int_0^1 y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4} erf(1) - \frac{1}{2} e^{-1}$ rezultă:

$$\frac{N(\varepsilon < kT)}{N(\varepsilon > KT)} = 0{,}4$$

*

30. Folosim (3.149) $\frac{dN}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$ și obținem:

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi N_A kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Mv^2}{2kN_A T}} v^2 \Delta v = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} v^2 \Delta v$$

Rezultă în urma înlocuirilor, $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}011$.

*

31. Viteza medie $\bar{v} = \int v f(v) dv$ *unde* $f(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$,

astfel că: $\bar{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$. Ținând seama că $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2\beta+1} dx = \frac{\beta!}{2\alpha^{\beta+1}}$ și particularizând pentru $\alpha = \frac{m}{2kT}$ și $\beta = 1$ obținem: $\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^2$.

*

32. Distribuția particulelor după coordonate este exprimată prin relația (3.154)

$$P(\vec{r})d\vec{r} = const.exp\left(-\frac{U(\vec{r})}{kT}\right) d\vec{r}$$

În cazul nostru, $U = mgz$ și $dm(z) \approx exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz$. Poziția z_0 a centrului de greutate al coloanei de gaz rezultă din relația: $z_0 = \frac{\int_0^{\infty} z\, exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz}{\int_0^{\infty} exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz} = \frac{kT}{mg} \frac{\int_0^{\infty} y\, e^{-y}\, dy}{\int_0^{\infty} e^{-y}\, dy} = \frac{kT}{mg} \Gamma(2) = \frac{kT}{mg}$.

*

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

33. În virtutea distribuției Boltzmann, $dN(\vec{r}) = C \cdot e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}} dxdydz$. Alegem sistemul de coordonate cilindrice cu axa cilindrului ca axă Oz:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

În acest caz, $dxdydz = rdrd\varphi dz$ și $dN(r,\varphi,z) = C \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}} rdrd\varphi dz$. Energia potențială ε_p rezultă din energia potențială gravitațională ε_{p1} și din energia potențială ε_{p2} în câmpul forței centrifuge: $\varepsilon_p = \varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2}$; $\varepsilon_{p1} = mgz$ iar pentru ε_{p2} observăm că $d\varepsilon_{p2} = -dL = -Fdr = -m\omega^2 dr$, astfel că prin integrare, $\varepsilon_{p2} = -\int m\omega^2 dr = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} + \varepsilon_{po}$. Rezultă:

$$dN(r,\varphi,z) = C \cdot e^{\frac{mgz - \frac{m\omega^2 r^2}{2}}{kT}} rdrd\varphi dz$$

Constanta C rezultă din condiția de normare, impunând condiția ca în interiorul vasului de volum V numărul de molecule să fie N.

$$N = C\int_0^{r_0} e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}} rdr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{h_0} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz$$

Integralele se calculează succesiv

$$\int_0^{r_0} e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}} rdr = \frac{2kT}{m\omega^2}\left(e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}} - 1\right); \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi; \int_0^{h_0} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = \frac{kT}{mg}\left(1 - e^{-\frac{mgh_0}{kT}}\right).$$

Obținem: $N = C\left(\frac{kT}{m\omega}\right)\frac{2\pi}{g}\left(e^{+\frac{m\omega^2 r_0^2}{2}} - 1\right)\left(1 - e^{-\frac{mgh_0}{kT}}\right)$ din care rezultă:

$$C = N\frac{\left(\frac{m}{kT}\right)^2 \frac{g}{2\pi}}{\left(1 - e^{-\frac{mgh_0}{kT}}\right)\left(e^{+\frac{m\omega^2 r_0^2}{2}} - 1\right)}$$

*

34. Masa dm de aer conținută în stratul cilindric de înălțime dy situat la cota y, va fi: $dm = \rho S dy$

Cota y_0 a centrului de greutate rezultă din relația: $y_0 = \frac{\int ydm}{\int dm} = \frac{\int_0^\infty yS\rho dy}{\int_0^\infty S\rho dy}$ sau ținând seama de variația densității cu altitudinea, $y_0 = \frac{\int_0^\infty ye^{-\frac{\mu g y}{RT}} dy}{\int_0^\infty e^{-\frac{\mu g y}{RT}} dy} = \frac{RT}{\mu g}$. La această cotă, în virtutea relației $\rho(y) = \rho(0)e^{-\frac{\mu g y}{RT}}$ se obține $\rho(y_0) = \frac{\rho(0)}{e}$.

*

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

35. Considerăm relațiile: $p = nkT = \frac{dN}{dV}kT = \frac{N\mathcal{P}}{S}kT$

în care $\mathcal{P}$ este densitatea de probabilitate de tip Boltzmann, iar S secțiunea tubului.

Rezultă $p = p(0)e^{-\frac{U}{kT}}$, *U fiind energia potențială a unei molecule*

$$U = -\int_0^x m\omega^2 x dx = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Rezultă, $p(l) = p(0)e^{\frac{\mu\omega^2 l^2}{2RT}} \approx 780\ torr$.

*

36. Densitatea ρ a gazului rezultă din ecuația termică a gazului ideal: $\rho = \frac{\mu}{RT}p$ și fiind proporțională cu presiunea, va urma o aceeași lege de variație cu distanța x: $\rho(x) = \rho_0 e^{\frac{\mu\omega^2 x^2}{2RT}}$.

Masa de aer conținută în tub, este: $m = \int_0^l S\rho dx = S\rho_0 \int_0^l e^{\frac{\mu\omega^2 x^2}{2RT}} dx$ și în ipoteza că $\frac{\mu\omega^2 x^2}{2kT} << 1$,

rezultă $m = S\rho_0 l\left(1 + \frac{\mu\omega^2 l^2}{6RT}\right) = \frac{p_0\mu}{RT}Sl\left(1 + \frac{\mu\omega^2 l^2}{6RT}\right)$. Cum inițial $m = \frac{p_i V\mu}{RT}$, p_i fiind presiunea

inițială egală cu presiunea atmosferică normală obținem: $p_0\left(1 + \frac{\mu\omega^2 l^2}{6RT}\right) = p_i$ din care,

$p_0 \approx p_i\left(1 - \frac{\mu\omega^2 l^2}{3RT}\right)$ astfel că, $p(l) = p_0\left(1 + \frac{\mu\omega^2 l^2}{2RT}\right) \approx p_i\left(1 + \frac{\mu\omega^2 l^2}{3RT}\right)$ și,

$$\Delta p = p(l) - p_0 = p_i \cdot \frac{\mu\omega^2 l^2}{2RT} \text{ sau } \frac{\Delta p}{p_i} = \frac{\mu\omega^2 l^2}{2RT}.$$

Înlocuind numeric, se obține $\frac{\Delta p}{p_i} = 9{,}5\%$ care conduce la $\Delta p = 722\ torr$.

*

37.

a). $G = mg\int dN = mg\rho_0 \int_0^h exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right]dz \int dxdy =$

$$mg\rho_0 S\frac{kT}{mg}\left(1 - exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right]\right) = SkT(\rho_0 - \rho_h)$$

b). Energia potențială medie a unei molecule aflată în câmp gravitațional este – prin definiție – egală cu: $\overline{\varepsilon_p} = mg\bar{z} = mg\int z d\mathcal{P}_B$, în care $d\mathcal{P}_B$ este probabilitatea ca molecula să se găsească la o înălțime cuprinsă în intervalul $z, z+dz$.

$$d\mathcal{P}_B = \frac{exp\left[-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right]}{\int exp\left[-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right]dz} \text{ deci } \overline{\varepsilon_p} = mg\frac{\int z\, exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right]dz}{\int exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right]dz}.$$

Distingem două cazuri:

b_1); dacă înălțimea coloanei de gaz este suficient de mare limitele de integrare pot fi considerate de la $z = 0$ la $z \to \infty$. Cu schimbarea de variabilă $z = t^2$ integrala de la numărător,

BUJIASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$I_1 = \int z\exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right]dz = \int_0^{\infty} 2t^3\exp\left[-\frac{mgt^2}{kT}\right]dt = 2\frac{1}{2}\left(\frac{kT}{mg}\right)^2 = \left(\frac{kT}{mg}\right)^2 \quad iar$$

$$I_2 = \int \exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right]dz = \frac{kT}{mg}$$

Rezultă în acest caz: $\overline{\varepsilon_p} = mg\left(\frac{kT}{mg}\right)^2\left(\frac{mg}{kT}\right) = kT$

b2);pentru *h* mult mai mic decât *kT/mg* se dezvoltă în serie exponențiala de sub integrală:

$$\overline{\varepsilon_p} = mg\frac{\int_0^h z\left[1-\left(\frac{mgz}{kT}\right)+\ldots\right]dz}{\int_0^h\left[1-\left(\frac{mgz}{kT}\right)+\ldots\right]dz} = mg\frac{h}{2}\frac{\left(h-\frac{mgh^2}{3kT}\right)}{\left(h-\frac{mgh^2}{2kT}\right)} \cong mg\frac{h}{2}$$

și nu depinde de temperatură.

c).Energia potențială medie a unui mol de gaz într-o coloană foarte înaltă, este:

$\overline{E_p} = \overline{\varepsilon_p}N_A = N_A kT = RT$ și $C_V^{pot} = \frac{\partial\overline{E_p}}{\partial T} = R$ comparabilă cu contribuția energiei cinetice a moleculelor la căldura molară a gazului.În cazul unei coloane de înălțime finită:

$$\overline{E_p} = \overline{\varepsilon_p}N_A = \frac{mgN_A h}{2} \text{ și } C_V^{pot} = \frac{\partial\overline{E_p}}{\partial T} = 0$$

Aceasta arată că în cazurile de importanță practică a unor coloane de gaz nu prea înalte, contribuția energiei potențiale în câmp gravitațional la căldura molară a gazului se poate neglija.

*

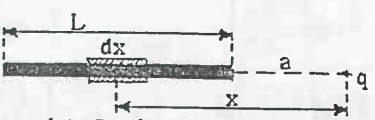
*38.*Concentrația moleculelor *n* se modifică funcție de altitudine după legea: $n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{kT}}$:

$n_1 = n_1(0)e^{-\frac{\mu_1 gh}{kT}}$; $n_2 = n_2(0)e^{-\frac{\mu_2 gh}{kT}}$. Se obține $\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1(0)}{n_2(0)}e^{\frac{gh}{kT}(\mu_2-\mu_1)}$.

Dacă $\mu_2 > \mu_1$, rezultă $n_1 > n_2$ ceea ce arată că la o creștere a altitudinii crește conținutul de gaz mai ușor față de concentrația gazului mai greu: $\frac{n_{H_2}}{n_{CO_2}} = e^{\frac{gh}{kT}(44-2)} = 2$,din care prin logaritmare se obține $h = \frac{RT\ln 2}{42g} = 3.920\,[m]$.

*

II.4 ELECTRICITATE

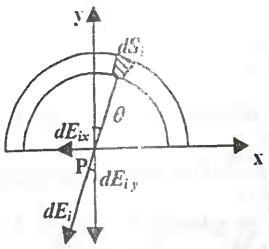


1. Fie λ densitatea liniară de sarcină. Sarcina elementară dQ conținută în elementul liniar dx, rezultă a fi $dQ = \lambda dx$.Forța de interacție între sarcina q și această sarcină elementară dQ, este

$dF = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{x^2} = \frac{q\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$.Prin integrare, obținem $F = \frac{q\cdot\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{L+a}\frac{dx}{x^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{a(L+a)}$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.



Notăm cu λ densitatea liniară de sarcină distribuită pe arcul de cerc. Sarcina elementară distribuită pe elementul de arc dS_i, va fi egală cu $\lambda \cdot dS_i$. Câmpul electric creat de acest element în punctul P, este $dE_i = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dS_i}{a^2}$; a fiind raza semicercului. Acest câmp se descompune într-o componentă orizontală dE_{ix} și o componentă verticală dE_{iy}.

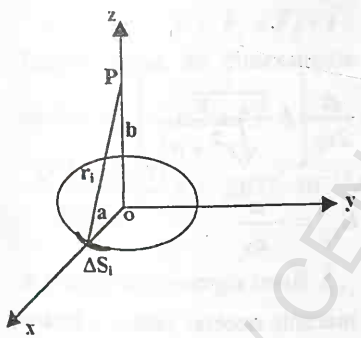
Componentele dE_{ix} generate de porțiunea din arc din partea dreaptă a figurii vor fi anihilate de aceleași componente generate de porțiunea din arc din partea stângă, astfel că numai componentele dE_{iy} vor contribui la câmpul total în P:

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \int \cos\theta ds .$$

Observând că elementul de arc ds poate fi exprimat în funcție de $d\theta$, $ds = rd\theta$, r fiind raza semicercului a cărei valoare este egală cu a, rezultă: $E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$.

*

3. Notăm cu b distanța de la centrul O al inelului la punctul P. Potențialul φ în punctul P se calculează cu relația $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i}$ în care Δq_i sunt sarcinile elementare conținute în elementele de arc Δs_i ale inelului și au valorile $\Delta q_i = \lambda \Delta s_i$.



Rezultă, $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2}} \oint ds$ și cum $\oint ds = 2\pi a$ obținem $\varphi = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2}}$.

Punctul P are coordonatele $(0,0,z)$, astfel încât potențialul φ în lungul axei Oz, va fi $\varphi = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$ și

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\lambda a z}{2\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

*

4. În interiorul cilindrului $(r < a)$, câmpul electric E este $E_i = 2\pi\rho r$ iar în exterior $(r > a)$, valoarea acestuia este $E_e = \frac{2\pi\rho a^2}{r}$. Cum $E = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $d\varphi = -Edr$. Rezultă pentru $r < a$,

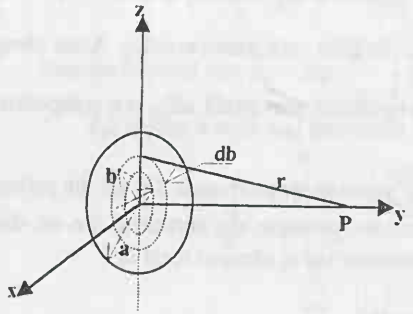
$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} d\varphi = -\int_a^r Edr = -\int_0^r 2\pi\rho r dr \text{ și } \varphi_i - \varphi_0 = -\pi\rho\left(r^2 - a^2\right),$$

φ_0 fiind *potențialul pe suprafața cilindrului*.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru $r > a$, $\varphi_e - \varphi_0 = -\int_a^r 2\pi\rho\frac{a^2}{r}dr = -2\pi\rho a^2 \ln\frac{r}{a}$.

*



5.a) Potențialul φ_p în punctul $P(0,y,0)$ poate fi calculat cu relația $\varphi_p = \int\frac{dq}{r}$. Considerăm pe disc un inel de grosime db care se găsește la distanța b de origine. Sarcina conținută în acest inel, este :
$dq = \sigma ds = \sigma \cdot 2\pi \cdot b \cdot db = 2\pi\sigma \cdot b \cdot db$.
Dar $r = \sqrt{y^2 + b^2}$. Rezultă,

$$\varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{dq}{\sqrt{y^2+b^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+y^2} - |y|\right).$$

Deosebim : $\varphi_p(0,y,0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{y^2+a^2} - y\right)$ pentru $y > 0$

$\varphi_p(0,-y,0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{y^2+a^2} + y\right)$ pentru $y < 0$.

$\varphi_p(0,0,0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ pentru $y = 0$.

Pentru $y >> a$, $\sqrt{y^2+a^2} - y = y\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{y^2}} - 1\right)$ și cum $\sqrt{1+\frac{a^2}{y^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{y^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{a^4}{y^4} + \ldots$,

obținem $\varphi_p \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\frac{a^2}{y^2} = \frac{\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0 y^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y^2}$.

b). Pentru calculul câmpului, ținem seama că

$$E_{y+} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{d}{dy}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{y^2+a^2} - y\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\right]$$

Analog se obține $E_{y-} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} + 1\right]$ și $E_{y+} - E_{y-} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

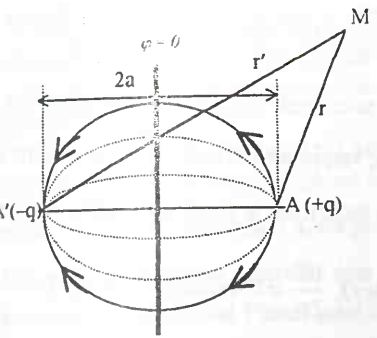
*

6. Considerăm un strat sferic de rază r și grosime dr. Lucrul mecanic necesar pentru a încărca acest strat sferic cu sarcina dq este $dL = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}dq$. Sarcina q conținută în sfera de rază $r < R$ este dată de $q = \rho\cdot\frac{4\pi}{2}r^3$ din care se obține $dq = 4\pi\rho r^2 dr$ și $dL = \frac{4\pi\rho r^3}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot 4\pi\rho r^2 dr =$

$= \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 r^4 dr$. Însă $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$. Rezultă, $dL = \frac{3Q^2}{4\pi R^6\varepsilon_0}r^4 dr$ și pentru energia electrostatică W a sferei : $W = L = \int_0^R \frac{3Q^2}{4\pi R^6\varepsilon_0}r^4 dr = \frac{3Q^2}{20\pi\cdot R\varepsilon_0}$.

*

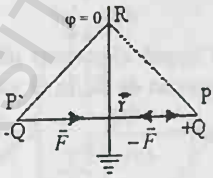
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



7. a) Planul mediator al axei AA' a unui dipol electric se caracterizează prin potențial nul. Dacă se metalizează acest plan și se menține la potențialul $\varphi = 0$, după îndepărtarea sarcinii $-q$ sarcinile reale conținute în acest plan produc într-un punct M același potențial ca și sarcina $-q$ aflată la distanța $2a$ de sarcina $+q$. Sarcina $-q$ devine astfel *fictivă* și se numește *sarcină imagine*, poziția ei rămânând aceeași pe care inițial se afla sarcina reală $-q$. În cazul problemei, placa metalică AA' și sfera încărcată cu sarcina Q echivalează cu un dipol electric alcătuit din *sarcina reală* Q plasată în P și *sarcina imagine, fictivă* $-Q$ ce ar fi plasată pe o poziție simetrică lui P în raport cu planul, în P'. Cele două sarcini creează în planul mediator al axei PP' un potențial, nul.

b) Forța electrostatică de interacție dintre cele două sarcini este dată de legea lui Coulomb și are valoarea

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(2L)^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 10^{-20}}{4} = 2{,}25\cdot 10^{-11}\,N$$

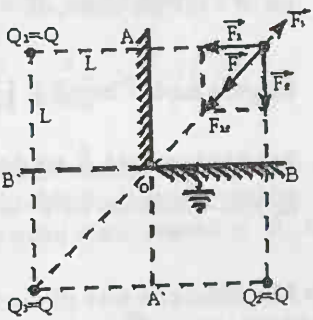


Această forță se scrie vectorial : $\vec{F} = \frac{(-Q)\cdot(+Q)}{4\pi\varepsilon_0(2L)^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \frac{-Q^2}{32\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ în care $\vec{r}$ reprezintă vectorul de poziție al sarcinii $+Q$ față de sarcina $-Q$, punctul P' fiind acceptat ca origine a vectorului de poziție, $\vec{r} = \overrightarrow{P'P}$.

*

8. Sistemul echivalent alcătuit din sarcinile imagine Q_1, Q_2, Q_3 și sarcina reală Q va fi caracterizat de forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ și $\vec{F}_3$ astfel că forța rezultantă ce acționează asupra sarcinii Q, va fi :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_3.$$



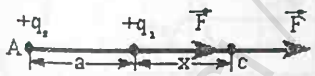
Ținând seama de dimensiunile liniare ale configurației, rezultă $F_{12} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{2}F_1$ și $F = F_1\cdot\frac{2\sqrt{2}-1}{2} =$

$$= \frac{Q^2\left(2\sqrt{2}-1\right)}{32\pi\varepsilon_0 L^2}N = 2{,}057\cdot 10^{-11}\,N$$

*

9. Conservăm energia totală $E_{p_a} = E_{c_c} + E_{p_c}$:

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{mv^2}{2} + \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0(a+x)} \Rightarrow v^2 = \frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0 m}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x}\right]$$



Notăm $\alpha \equiv \frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0 m}$ și rezultă $v = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x}}$. Această expresie va admite un maxim pentru $x \to \infty$, $v_{max} = \sqrt{\frac{\alpha}{a}} = 4{,}24\cdot 10^{-4}\,m\cdot s^{-1}$.

*

10.

Fie r raza sferei neutre. În urma contactului între sfere se va fi produs un transfer de sarcină de pe sfera încărcată spre cea neutră până când cele două sfere ajung la același potențial când transferul încetează. Fie q_1 și q_2 sarcinile de pe sfere în acest moment. Avem :

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

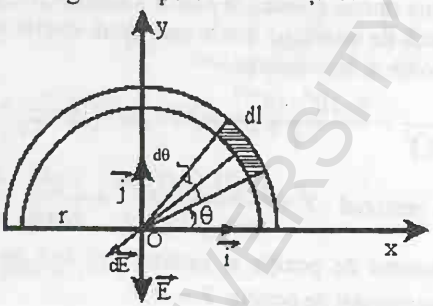
$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \frac{q_1}{R} = \frac{q_2}{r}$ şi $q_1 + q_2 = q$. Din aceste ecuaţii, rezultă : $q_1 = q \cdot \frac{R}{R+r}$ şi $q_2 = q \cdot \frac{r}{R+r}$. În ipoteza că razele R şi r sunt mult mai mici decât distanţa D între sfere, acestea pot fi considerate ca punctiforme, astfel că forţa de respingere dintre sfere va fi egală cu $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 D^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Rr}{(R+r)^2 D^2}$. Prin ipoteză, această forţă trebuie să aibă valoarea maximă.

Punând condiţia de maxim pentru F (care este funcţie de r), $\frac{\partial F}{\partial r} = 0$ rezultă $r = R = 0.1m$.

*

11. Considerăm un element de lungime dl pe circumferinţa semiinelului încărcat cu sarcină elementară dq:

$$dq = \lambda dl .$$



Câmpul elementar $d\vec{E}$ generat de dq în O va fi:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{n}, \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

iar $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

În coordonate polare,

$x = r\cos\theta; y = r\sin\theta$

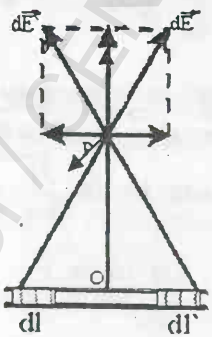
iar elementul de lungime $dl = rd\theta$. Se obţine, $d\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta}{r} d\theta$.

Integrăm după θ între 0 şi π : $\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\vec{i}\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta + \vec{j}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\right] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{j}$.

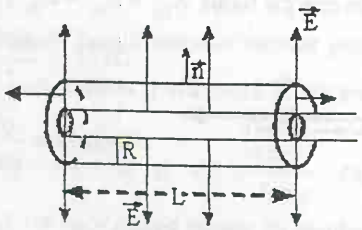
Rezultă că vectorul $\vec{E}$ are direcţia axei Oy în sensul negativ al acesteia iar modulul E este dat de $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 18 \cdot 10^9 V \cdot m^{-1}$.

*

12.



a



b

a) Considerăm un punct oarecare P în spaţiul unde calculăm câmpul electric $\vec{E}$ generat de elemente de lungime dl şi dl' simetrice în raport cu piciorul O al perpendicularei din P pe fir.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Sarcinile elementare conținute în aceste elemente de fir $dq = \lambda dl$ și $dq' = \lambda dl'$ generează în P câmpurile elementare $d\vec{E}$ și $d\vec{E}'$ ale căror componente paralele cu conductorul se anulează, astfel că rămân numai componentele verticale care se însumează într-o rezultantă perpendiculară pe fir.

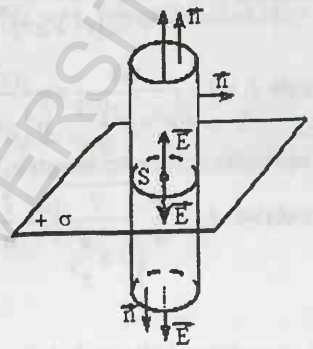
b).Fluxul vectorului electric prin anvelopa cilindrică reprezentată prin figura b se compune din *fluxul prin suprafața cilindrică laterală* și *fluxurile prin baze*.Notăm cu S_b suprafața bazei și cu S_l suprafața laterală. Fluxul printr-o bază, se scrie $\phi_b = \vec{E}\cdot\vec{S}_b = \vec{E}\cdot S_b\cdot\vec{n} = S_b E\cos\pi/2 = 0$

Fluxul prin suprafața laterală, este : $\phi_l = \vec{E}\cdot\vec{S}_l = \vec{E}\cdot S_l\cdot\vec{n} = S_l E\cos 0^0 = S_l\cdot E = 2\pi RLE$ și coincide cu fluxul total.Fluxul total însă conform teoremei lui Gauss este egal cu Q/ε_0:

$2\pi RLE = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda L}{\varepsilon_0}$.Rezultă $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = 3{,}6\cdot 10^9 V/m$.

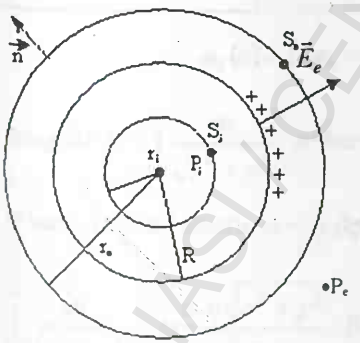
*

13. Considerăm un cilindru pe care planul îl secționează normal și aplicăm teorema lui Gauss pentru fluxul vectorului $\vec{E}$ prin suprafața domeniului delimitat de acest cilindru. Simetria elementelor de arie aparținând planului și încărcate cu sarcină electrică conferă vectorului câmp electric o direcție perpendiculară pe plan, deci paralelă cu suprafața laterală a cilindrului. Această orientare a vectorului $\vec{E}$ va face ca fluxul acestui vector prin suprafața laterală a cilindrului să fie nul, iar fluxul total prin bazele cilindrului, va fi : $\phi = 2\cdot\vec{S}\cdot\vec{E} = 2\cdot S\cdot\vec{n}\cdot\vec{E} = 2SE = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, Q fiind sarcina totală conținută pe suprafața S de intersecție a cilindrului cu planul.Obținem $2SE = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ din care, rezultă: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\sigma = 17\cdot 10^4 V/m$.



*

14. Câmpul electric $\vec{E}$ generat de sarcina pozitivă cu densitatea σ are direcție radială și orientarea dată de liniile de câmp ce pleacă –convențional – de pe distribuțiile de sarcină pozitive. Vom avea în vedere două puncte arbitrare : P_i în interiorul stratului sferic încărcat și P_e, în exteriorul acestuia.



Considerăm o sferă fictivă de rază r variabilă care să "mănânce" întregul spațiu cuprins între centrul stratului sferic și exterior și scriem teorema lui Gauss pentru zonele cu $r < R$ și $r > R$. Astfel

- pentru $r < R$, $\phi_i = \vec{E}_i\cdot\vec{S}_i = E_i\cdot S_i = Q_{int}/\varepsilon_0 = 0$

deoarece în interiorul stratului sferic, $Q_{int} = 0$.

- pentru $r > R$ avem

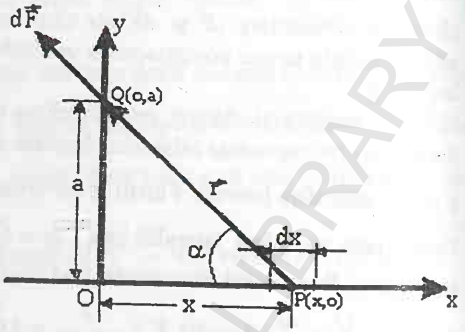
$$\phi_e = \vec{E}_e\cdot\vec{S}_e = E_e\cdot 4\pi r_e^2 = Q_{int}/\varepsilon_0\big|_{r>R}$$

În acest caz, $Q_{int} = \sigma\cdot S = 4\pi R^2\sigma$ .Rezultă că în exteriorul stratului sferic, câmpul electric $\vec{E}_e$ este definit de valoarea $E_e = \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r_e^2}$ sau de vectorul $\vec{E}_e = \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}_e}{r_e^3}$. Numeric, $E_e = 113\cdot 10^3 V/m$.

*

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

15. Presupunem că atât sarcina distribuției cât și sarcina Q sunt pozitive. Elementul dx al distribuției va acționa la distanța $\vec{r}$ asupra sarcinii Q cu o forță elementară $d\vec{F}$:



$$d\vec{F}=\frac{Qdq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}=\frac{\lambda Q dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

Integrând pentru $x\in(-\infty,\infty)$, obținem :

$$\vec{F}=\frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{r^3}\vec{r}$$ și ținând seama că $r=\sqrt{x^2+a^2}$

iar $\vec{r}=-x\vec{i}+y\vec{j}$ expresia forței totale $\vec{F}$, capă - tă forma: $\vec{F}=\frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-x\vec{i}+y\vec{j})dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=I_1+I_2$

unde $I_1=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$ iar $I_2=a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=2a\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$.

Pentru calculul acestei integrale, se face substituția : $x^2+a^2=x^2t^2$:

Se obține, $I_2=\frac{2}{a}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}}}\Big|_0^{\infty}=\frac{2}{a}$. Rezultă, $\vec{F}=\frac{\lambda Q}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{j}=54\cdot10^3 N.$

*

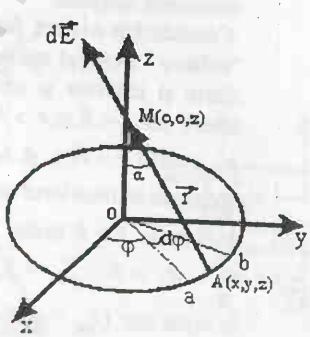
16. Se consideră un element de lungime $dl=\overset{\frown}{ab}$ al conductorului inelar încărcat cu sarcina dQ și care generează în M vectorul câmp electric elementar

$$d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

în care $\vec{r}=-x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}$. Vom lucra în coordonate cilindrice :

$x=R\cos\varphi, y=R\sin\varphi, z=z$ iar $dl=Rd\varphi$.

Avem, de asemenea $dQ=\lambda dl$ ceea ce presupune $Q=2\pi R\lambda$.



Rezultă, prin integrare $\vec{E}=\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}(-R\cos\varphi\,\vec{i}-R\sin\varphi\,\vec{j}+z\vec{k})d\varphi$

și cum $\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=0$, $\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=0$ se obține : $\vec{E}=\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\pi}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cdot z\vec{k}=\vec{E}(z)$.

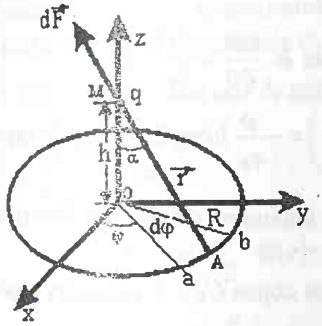
BCUIASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin anularea derivatei

$\frac{d\vec{E}(z)}{dz} = 0$ *rezultă* $z_{max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ şi $E(z_{max}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{R^2} = 2\sqrt{3} \cdot 10^{16}\, V\ m$.

*

*17.*a)Considerăm elementul de arc $\overset{\frown}{ab} = dl$ încărcat cu sarcina $dQ = \lambda dl$ şi care acţionează în M asupra sarcini q cu forţa elementară:



$$d\vec{F} = \frac{qdQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Lucrăm în coordonate polare:

$x = R\cos\varphi$; $y = R\sin\varphi$; $z = z$ şi obsevând că M $(0,0,h)$ şi $\vec{r} = -R\cos\varphi\,\vec{i} - R\sin\varphi\,\vec{j} + z\vec{k}$ obţinem, prin integrare,

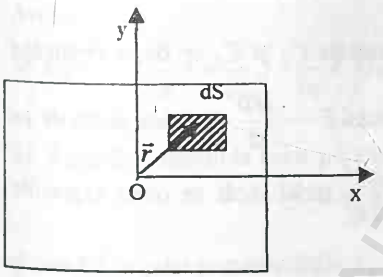
$\vec{F} = \frac{2\pi q\lambda Rz}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \vec{k}$ $(z_0 = h)$ ceea ce arată că forţa este dirijată în lungul axei Oz.

b) $\frac{dF}{dZ} = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{R}{\sqrt{2}} = h_0 \Rightarrow F_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ sau,

numeric $F_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 10^3 N$.

*

18.



Elementul de suprafaţă dS al plăcii, conţine sarcina: $dq = \sigma\, dxdy$ considerată punctiformă care va crea în centrul de masă O al plăcii, potenţialul elementar, $d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Potenţialul total, φ se va obţine prin integrare asupra tuturor contribuţiilor elementare dS:

$$\varphi_1(o) = \int d\varphi_1 = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \int \frac{dxdy}{r} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^b dy \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Integrala $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ se face cu substituţia Euler: $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = -x\sqrt{\alpha} + t \quad (a > 0)$

în care - în cazul nostru- $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = y^2$. Cum $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) + C$,

$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ln\frac{a + \sqrt{a^2 + y^2}}{y}$. Rezultă $I_2 = \int_0^b ln\frac{a + \sqrt{a^2 + y^2}}{y} dy$ care se efectuează prin

părţi notând $u \equiv y$ şi $v = \frac{ln\left(a + \sqrt{a^2 + y^2}\right)}{y}$. Se obţine: $I_2 = y ln\frac{a + \sqrt{a^2 + y^2}}{y}\Big|_0^b + a\int_0^b \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2}}$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În final, rezultă contribuția unui sfert din placă la valoarea potențialului :

$$\varphi_1(0)=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[a\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}+b\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right]$$

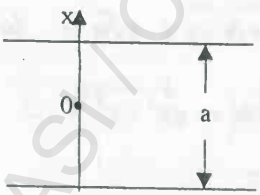
astfel încât pentru intreaga placă, $\varphi(0)=4\varphi_1(0)$

*

19. Se pleacă de la ecuația Poisson $\Delta\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ pentru care se are în vedere simetria sferică ce va face ca potențialul Φ să depindă numai de r și nu de θ sau φ: $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=0$

În coordonate sferice ecuația Poisson, devine: $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Integrând odată în raport cu r, rezultă: $r^2\frac{d\Phi}{dr}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{r^3}{3}+C_1$. Constanta C_1 rezultă impunând condiția ca în centrul sferei potențialul să fie constant și $\frac{d\Phi(0)}{dr}=0$. Pentru $r=0$ se obține $C_1=0$ și ecuația capătă forma: $\frac{d\Phi}{dr}=-\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\Rightarrow\Phi(r<R)=-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}+C_2$ Pentru un punct situat în exteriorul sferei, $\rho=0$ și ecuația Poisson, devine , $\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right)=0$ din care rezultă $r^2\frac{d\Phi}{dr}=C_3$. Integrând această ecuație în raport cu r, $\Phi(r>R)=\frac{C_3}{r}+C_4$. Constanta C_4 rezultă din condiția ca $\Phi(\infty)=0$ .Se obține, $C_4=0$ și $\Phi(r>R)=-\frac{C_3}{r}$. Constantele C_2 și C_3 se obțin impunând condiția de continuitate a potențialului $\Phi(r)$ și a câmpului $E=-\frac{d\Phi}{dr}$ în orice punct de pe suprafața sferei $(r=R)$.Rezultă, $C_2=\frac{\rho R^3}{2\varepsilon_0}$ și $C_3=-\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$ astfel încât se obțin expresiile finale : $\Phi(r<R)=-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}+\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$ și $\Phi(r>R)=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$.

*



20. Planele fiind infinite, potențialul Φ va depinde doar de coordonata x, iar ecuația lui Poisson se scrie :

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Pentru $x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]$, ρ este constant și diferit de zero. Se observă că $\Phi(0)=0$; $\Phi(x)=\Phi(-x)$ și se poate scrie $\frac{d^2\Phi}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

BCUIASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int d\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int dx \Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + C_1 \Rightarrow \int d\Phi = \Phi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + C_1 x + C_2$$

Câmpul electric $E(x) = -\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x - C_1$

- Pentru $x \notin \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], \rho = 0, \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = C_3 \Rightarrow \Phi(x) = C_3 x + C_4$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţiile $\Phi(0) = 0$ şi $\Phi(x) = \Phi(-x)$.
Rezultă $C_1 = C_2 = 0$. Constantele C_3 şi C_4 se stabilesc prin condiţiile de continuitate a potenţialului $\Phi(x)$ şi a derivatei sale de ordinul I, $\frac{d\Phi}{dx}$ la frontierele $x = \pm\frac{a}{2}$. Rezultă $C_3 = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$ şi $C_4 = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$. Se obţine:

- *pentru* $|x| \le \frac{a}{2}$: $\Phi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$; $E(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$

- *pentru* $x > \frac{a}{2}$ şi $x < -\frac{a}{2}$, $\Phi(x) = -\frac{\rho a x}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$ şi $E(x) = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$

*

21. Pentru ca $\varphi = -\vec{E}_0 \vec{r}$ să fie un potenţial scalar pentru câmpul $\vec{E}_0$, trebuie ca:

$$\vec{E}_0 = -\nabla\varphi = \nabla\left(\vec{E}_0 \vec{r}\right)$$

Avem:

$$\nabla\left(\vec{E}_0 \vec{r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(E_{0x}\cdot x + E_{oy}\cdot y + E_{oz}\cdot z\right) = E_{ox}\vec{i} + E_{oy}\vec{j} + E_{oz}\vec{k} = \vec{E}_0$$

*

22. Raportăm mediul la axele principale ale tensorului permitivităţii şi scriem astfel:

$$D_x = \varepsilon_x E_x; \quad D_y = \varepsilon_y E_y; \quad D_z = \varepsilon_z E_z$$

şi cum $\nabla\vec{D} = \rho$ iar permitivităţile $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ şi ε_z sunt constante, rezultă:

$$\varepsilon_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon_y\frac{\partial E_y}{\partial y} + \varepsilon_z\frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho$$

ecuaţie care scrisă funcţie de potenţial, $\varepsilon_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \varepsilon_z\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \rho$ Prin schimbarea de variabile $\xi = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon_x}}, \eta = \frac{y}{\sqrt{\varepsilon_y}}, \zeta = \frac{z}{\sqrt{\varepsilon_z}}$ potenţialul scalar φ devine egal cu φ' iar densitatea de sarcină ρ devine ρ' astfel că $\varphi(x,y,z) = \varphi'(\xi,\eta,\zeta)$ iar $\rho(x,y,z) = \rho'(\xi,\eta,\zeta)$ şi ecuaţia Poisson $\nabla^2\varphi(\xi,\eta,\zeta) = -\rho'$, cu soluţia $\varphi'(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho'(\xi',\eta',\zeta')d\xi' d\eta' d\zeta'}{\sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + (\zeta-\zeta')^2}}$.

BCU MSI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Trecând la vechile variabile, $\varphi(x,y,z)=\dfrac{1}{4\pi\sqrt{\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z}}\displaystyle\int\frac{\rho(x',y',z')dx'dy'dz'}{\sqrt{\dfrac{(x-x')^2}{\varepsilon_x}+\dfrac{(y-y')^2}{\varepsilon_y}+\dfrac{(z-z')^2}{\varepsilon_z}}}$.

În cazul unei sarcini punctiforme $\rho(x',y',z')=\rho\delta(x')\delta(y')\delta(z')$ şi integrarea devine trivială.

Se obţine, $\varphi(x,y,z)=\dfrac{1}{4\pi\sqrt{\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z}}\dfrac{\rho}{\sqrt{\dfrac{x^2}{\varepsilon_x}+\dfrac{y^2}{\varepsilon_y}+\dfrac{z^2}{\varepsilon_z}}}$.

*

23. 1). Pentru fiecare fir $\varphi_1=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}ln\dfrac{a_1}{r_1}$ şi $\varphi_2=\dfrac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}ln\dfrac{a_2}{r_2}$ cu a_1 şi a_2 două constante.

$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}ln\dfrac{a_1r_2}{a_2r_1}$ deoarece $\varphi=0$ pentru $r_1=r_2$. Rezultă $\dfrac{a_1}{a_2}=1$ şi $\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}ln\dfrac{r_2}{r_1}$.

2) ; d este mic în raport cu r ; rezultă $r_1\approx r-\dfrac{d}{2}\cos\theta;r_2\approx r+\dfrac{d}{2}\cos\theta;\dfrac{r_2}{r_1}=1+\dfrac{d}{r}\cos\vartheta$ şi

deci $\varphi\approx\dfrac{\lambda d\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}=\dfrac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}$. Se obţin componentele câmpului electric în punctul M:

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=p\cos\frac{\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\text{ şi }E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=p\sin\frac{\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2},\text{unde } p=\lambda d.$$

Remarcând că $\vec{p}=p\cos\theta\vec{l}_r-p\sin\theta\vec{l}_\theta$, în final $\varphi=\dfrac{\vec{p}\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$ şi $\vec{E}=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\left[2(\vec{p}\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}\right]$.

Relaţiile coincid cazului unui dipol de moment $\vec{p}$ dirijat după axa Ox.

*

24. Pentru o diferenţă de potenţial $\Phi_2-\Phi_1$ constantă se stabileşte un curent electric constant: $\nabla\vec{j}=0$. Câmpul electric $\vec{E}$ într-un punct M situat între cele două sfere la distanţa r la centrul acestora rezultă din aplicarea teoremei lui Gauss pentru fluxul câmpului electric printr-o suprafaţă sferică curentă Σ ce trece prin M: $\int_\Sigma\vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$. Se obţine: $E_M=\dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Notăm $A\equiv\dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}$ şi ţinem seama că $\vec{E_M}=-\nabla\Phi=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}=-\dfrac{d\Phi}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial x}\vec{i}-$

$$-\frac{d\Phi}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}-\frac{d\Phi}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}=-\frac{d\Phi}{dr}\left[\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}\right]=-\frac{d\Phi}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\Rightarrow d\Phi=-E_M\cdot dr=-\frac{A}{r^2}dr\Rightarrow$$

$\Phi=\int d\Phi=\dfrac{A}{r}+B$ unde $B=const.$ Se obţin expresiile: $\Phi_2-\Phi_1=A\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}\right);I=\oint_\Sigma\vec{j}\cdot\vec{ds}=\int_\Sigma jds.$

Densitatea de curent în punctul M , $j_M=\sigma E_M=\sigma\dfrac{A}{r^2}$ şi $I=\oint_\Sigma\dfrac{\sigma A}{r^2}ds=\dfrac{\sigma A}{r^2}\cdot 4\pi r^2=4\pi\sigma A$.

Rezistenţa electrică a stratului dintre sfere este $R=\dfrac{\Phi_2-\Phi_1}{I}=\dfrac{1}{4\pi\sigma}\cdot\dfrac{R_1-R_2}{R_1R_2}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

S-a ținut seama de relațiile: $\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{j} \cdot d\vec{s} = \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\, ds = \sigma E ds$ şi,

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = E \cdot \cos \angle(\vec{n}, \vec{E}) = E \quad \text{deoarece } \vec{E} \parallel \vec{n}.$$

*

25. $\vec{E} = -\nabla \Phi = -\dfrac{d\Phi}{dr} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 + \dfrac{r}{a}\right) exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$

- Pentru $r << a \Rightarrow \dfrac{r}{a} \cong 0$ şi expresia câmpului coincide cu aceea rezultată din legea lui Coulomb pentru o sarcină q plasată în originea O.

- pentru $r >> a, exp.\left(-\dfrac{r}{a}\right) \cong 0$ şi câmpul devine neglijabil.

Fluxul magnetic prin sfera curentă de rază r, este: $\Phi(r) 4\pi r^2 E(r) = \dfrac{q}{\varepsilon_0}\left(1 + \dfrac{r}{a}\right) exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$;

- pentru $r \to 0$, $\Phi(r) = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ ceea ce în virtutea teoremei lui Gauss presupune existența unei sarcini punctuale q în O.

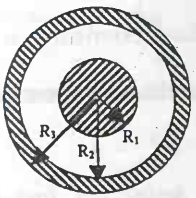
- pentru $r \to \infty$, $\Phi(r) \to 0$ ceea ce ar presupune existența unui "nor" cu sarcina totală $-q$.

Aplicăm teorema lui Gauss unui strat sferic de rază r şi grosime dr:

$$\nabla \vec{E} = -\Delta \Phi = +\frac{\rho}{\varepsilon_0} \; ; \; \rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r} exp.\left(-\frac{r}{a}\right)$$

*

26. a).Considerăm o sferă fictivă de rază curentă r, $R_1 < r < R_2$. Conform teoremei lui Gauss:



$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = E \oint_{S_r} dS = E \cdot S_r = E \cdot 4\pi r^2, E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Potențialul Φ rezultă din:

$$\Phi = -\int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Se obține: $C = \dfrac{Q}{\Phi} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

b). $R_2 = R_1 + e$ $\quad cu \; e << R_1$, $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}{e} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$ formulă ce exprimă capacitatea condensatorului plan.

b_1) Capacitatea sferei izolate A este $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ iar sarcina sa $Q_1 = C_1 \Phi_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \Phi$. Introducând-o în sferaB de asemenea izolată, aceasta se va încărca prin influență pe fața internă cu sarcina $-Q_1 = -4\pi\varepsilon_0 R_1 \Phi$, iar pe fața *externă* $+Q_1 = -4\pi\varepsilon_0 R_1 \Phi$. Acum, potențialul sferei A va fi devenit Φ' şi se compune din trei termeni:

$$\Phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 \Phi}{R_1} - \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 \Phi}{R_2} + \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 \Phi}{R_3}\right]$$

în care R_3 este raza exterioară a sferei B.

b_2) Dacă sfera B este legată la pământ, sarcina de pe fața externă a sferei B dispare şi di-

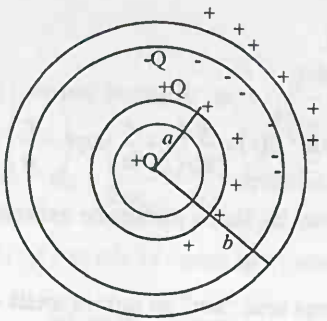
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ferența de potențial între A și B, devine: $\Delta\Phi = \Phi\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$.

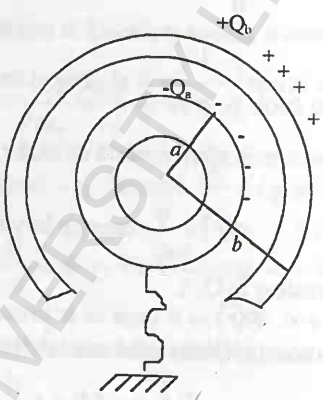
Capacitatea sferei A devine: $C_s = \frac{Q}{\Delta\Phi} = C_1 \frac{\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{C_1}{1 - \frac{R_1}{R_2}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

*

27. Potențialele sferelor de raze a și b din figura a sunt: $\varphi_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ și $\varphi_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$.



a



b

Diferența de potențial între sfere, va fi: $\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$ și se obține pentru capacitatea condensatorului sferic: $C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$. Prin încărcarea sferei exterioare cu sarcina Q_b, potențialul ei și al întregului volum din interiorul ei inclusiv al sferei interioare a -dacă aceasta nu este legată la pământ- va fi: $\varphi_b = \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$.

Prin conectarea sferei interioare la pământ potențialul său devine nul, însă această sferă se va încărca cu sarcina Q'_a astfel că: $\varphi_a = \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 a} = 0$ de unde: $Q'_a = -\frac{a}{b} Q_b$.

Potențialul stratului exterior generat de sar cinile Q'_a și Q_b va fi acum:

$$\varphi_b = \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q'_a}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(1 - \frac{a}{b}\right) = Q_b \frac{b-a}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$$

iar capacitatea condensatorului sferic format din armătura exterioară încărcată cu sarcina Q_b și armătura interioară pusă la pământ, va fi: $C' = \frac{Q_b}{\varphi_b - \varphi_a} = \frac{Q_b}{\varphi_b} = \frac{4\pi\varepsilon_0 b^2}{b-a}$ astfel că: $\frac{C'}{C} = \frac{b}{a}$.

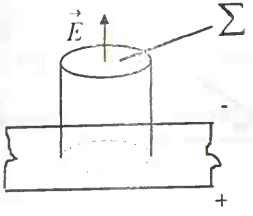
*

28.

a) Liniile câmpului electric în acest caz sunt normale pe axul firului. Calculăm deci fluxul câmpului printr-o suprafață cilindrică cu raza r și generatoarea l:

$$\phi = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \int_{\Sigma_l} dS = 2\pi r l \varepsilon_0 E = l\tau$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



unde $\sum_l$ reprezintă *suprafața laterală a cilindrului*. Rezultă,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}.$$

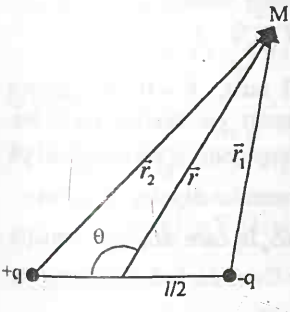
b) Din motive de simetrie liniile de câmp sunt și în acest caz paralele între ele și perpendiculare pe plan iar în interiorul conductorului plan câmpul este nul. Aproximăm o porțiune din plan cu un cilindru elementar prin suprafața căruia scriem teorema lui Gauss: $\varepsilon_0\varepsilon_r E\int dS = \sigma\int dS$. Rezultă $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$.

c) Scriem fluxul vectorului $\vec{E}$ printr-o suprafață sferică Σ concentrică de rază $r > R$:

$\varepsilon_0\varepsilon_r\int E dS = \varepsilon_0\varepsilon_r E\cdot 4\pi r^2 = Q$. Se obține $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}$.

*

29. Amintim că dipolul electric este ansamblul a două sarcini electrice de valoare egală, dar de semne contrarii. Proprietățile electrice ale acestui sistem sunt stabilite în primă aproximație de momentul electric dipolar $\vec{p} = q\vec{l}$. În vid, potențialul câmpului electric în M este



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

În cazul $r>>l$,

$$r_1^2 = r^2 + \vec{r}\cdot\vec{l},\ r_2^2 = r^2 - \vec{r}\vec{l} \text{ și } r_1^2 - r_2^2 \approx 2\vec{r}\vec{l}$$

Rezultă, $r_1 - r_2 = \frac{2\vec{r}\vec{l}}{r_1 + r_2}$, $r_1 + r_2 \equiv 2r$ și $r_1 r_2 \equiv r^2$.

Cu aceste relații, expresia potențialului devine

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\vec{l}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

iar pentru intensitatea câmpului electric al dipolului,

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p}\vec{r}) + \vec{p}\vec{r}\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

Avem, pe de altă parte $\nabla\frac{1}{r^3} = \nabla\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = -\frac{3r}{r^5}$ și

$$\nabla(\vec{p}\vec{r}) = (\vec{r}\nabla)\vec{p} + (\vec{p}\nabla)\vec{r} + \vec{r}\times\nabla\times\vec{p} + \vec{p}\times\nabla\times\vec{r} = (\vec{p}\nabla)\vec{r}$$

S-a ținut seama de faptul că $\vec{p} = const$ iar $\Delta\vec{r} = 0$.

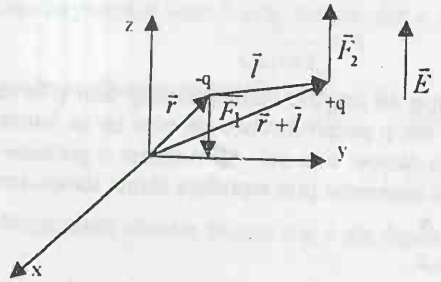
Pe de altă parte, $(\vec{p}\nabla)\vec{r} = \left(p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k} = \vec{p}$.

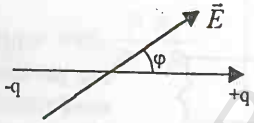
Se obține astfel expresia finală a intensității câmpului electric creat de un dipol electric:

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$;. Se observă că potențialul electric $\varphi_{dipol} \sim \frac{1}{r^2}$ și intensitatea câmpului electric $E_{dipol} \sim \frac{1}{r^3}$ pentru dipolul electric scad mai puternic cu distanța r decât pentru sarcinile electrice punctiforme $\varphi_q \sim \frac{1}{r}$; $E_q \sim \frac{1}{r^2}$ astfel că sarcinile electrice punctiforme caracterizate de momente electrice de dipol, vor interacționa între ele numai dacă sunt suficient de apropiate.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

30.





Asupra dipolului electric aflat într-un câmp electrostatic va acționaforța $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=q\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)$ în care $\vec{E}_2$ este intensitatea câmpului electric în punctul unde se află sarcina $+q$, iar $\vec{E}_1$ intensitatea câmpului electric în punctul în care se află sarcina $-q$.

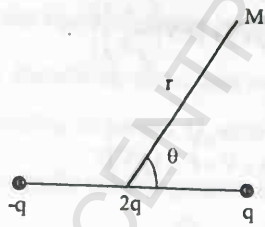
Dacă distanța l este suficient de mică, $\vec{E}_2=\vec{E}\left(\vec{r}+\vec{l}\right)=\vec{E}(\vec{r})+l_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}+l_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}+l_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}=\vec{E}_1+(l\nabla)\vec{E}$

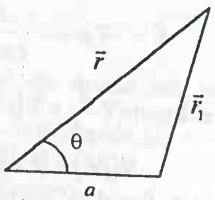
Rezultă pentru forța ce acționează asupra dipolului electric într-un câmp electrostatic neomogen expresia: $\vec{F}=q\left(\vec{l}\nabla\right)\vec{E}=(\vec{p}\nabla)\vec{E}=p_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}+p_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}+p_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}$.

Dacă câmpul este omogen rezultanta $\vec{F}$ a forțelor rezultă a fi nulă, $\vec{F}=0$ însă asupra dipolului va acționa un cuplu de forțe al cărui moment în raport cu centrul dipolului, este $\vec{M}=\vec{l}\times q\vec{E}=\vec{p}\times\vec{E}$. Modulul vectorului $\vec{M}$ este egal cu $pE\sin\varphi$ unde φ este unghiul pe care-l face $\vec{p}$ cu $\vec{E}$, iar lucrul mecanic efectuat pentru rotirea momentului dipolar $\vec{p}$ cu unghiul $d\varphi$ este $dL=Md\varphi=pE\sin\varphi d\varphi=-pEd(\cos\varphi)=-d\left(\vec{p}\vec{E}\right)=dE_p$ în care dE_p este variația energiei potențiale a dipolului electric în câmp electric omogen. Considerând constanta de integrare nulă, rezultă prin integrare, $E_p=-\vec{p}\vec{E}=pE\cos\varphi$.

*

31.





$$\varphi_M=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2q}{r}-\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}\right]$$

Folosim aproximațiile:

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\left[1+\frac{a}{r}\cos\theta+\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{3\cos^2\theta-1}{2}+\ldots\right]$$

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}\left[1-\frac{a}{r}\cos\varphi+\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{3\cos^2\theta-1}{2}+\ldots\right]$$

Se obține, $\varphi_M=\frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(1-3\cos^2\theta\right)$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

32.

a). Fie $\vec{i}_r$ şi $\vec{i}_\theta$ versorii asociaţi coordonatelor polare plane r şi θ ; $\vec{p} = p\left(\cos\varphi \vec{i}_r + \sin\varphi \vec{i}_\theta\right)$

Operatorul *nabla* în coordonate polare plane se scrie $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{i}_\theta$. Se obţine:

$$\vec{p}\nabla = p\left[\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right].$$

b). Câmpul $\vec{E}_1$ creat de dipol în punctul O este

$$\vec{E}_1 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos(\pi-\varphi)\vec{i}_r + \sin(\pi-\varphi)\vec{i}_\theta\right] = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\varphi \vec{i}_r - \sin\varphi \vec{i}_\theta\right] \text{ iar forţa}$$

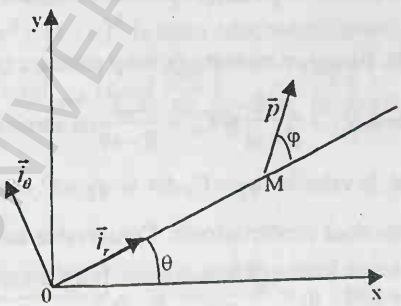
$\vec{F}_1 = Q\vec{E}_1 = -\vec{F}$. Analog $\vec{C}_1(M) = \overrightarrow{MO} \times \vec{F}_1 = -r\vec{i}_r \times \vec{F}_1 = \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\varphi \vec{i}_z = -\vec{C}(M)$

*

33.

Se observă din figura anterioară, că $\vec{p} = p\left(\cos\varphi \vec{i}_r + \sin\varphi \vec{i}_\theta\right)$. Ţinând seama de expresia gradientului în coordonate polare plane r şi θ,

$$\nabla \equiv \vec{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_\theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}.$$



Se obţine:

$\vec{p}\nabla = p\left[\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\varphi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\right]$ deci:

$$\vec{F} = \left(\vec{p}\nabla\right)\vec{E} \text{ şi } \vec{C} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

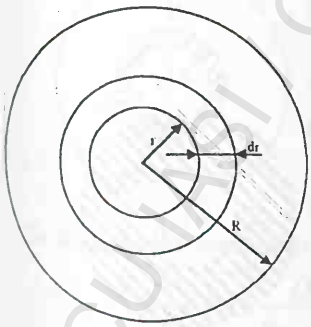
Rezultă,

$$\vec{C}(M) = -\frac{Qp\sin\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{i}_z \text{ şi}$$

$$\vec{F} = \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-2\cos\varphi \vec{i}_r + \sin\varphi \vec{i}_\theta\right]$$

*

34.



Fie ρ densitatea volumică de sarcină cu care se distribuie uniform în volum sarcina Q a sferei.

În sfera curentă de rază r este conţinută sarcina

$$q' = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Câmpul electric generat de această sarcină, va fi:

$E(r) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{qr^3}{R^3} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon r^2}$ iar potenţialul sferei de rază r,

$$\varphi = \int_r^\infty E(r)dr = \frac{q'}{4\pi\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{r^2}{R^3}.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Sarcina electrică conținută în stratul sferic de grosime dr, este: $dq = \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{3Q}{R^3} r^2 dr$, iar energia potențială a acestui strat sferic, $dW_q = \varphi dq = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon} \frac{r^4}{R^6} dr$.

Obținem energia electrostatică a sferei, integrând această expresie pentru r cuprins între 0 și R: $W = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{20\pi\varepsilon} \frac{Q^2}{R} > 0$ astfel că din punct de vedere mecanic, sistemul este instabil și poate ceda această energie.

*

35. Forța electrică de atracție ce acționează asupra sarcinii punctuale $+q$, datorită sarcinii punctuale negative de pe suprafața conductoare, este egală cu forța pe care sarcina imagine, $-q$ ar exercita-o asupra lui $+q$: $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2}$ în care x este distanța la plan a sarcinii $+q$ iar lucrul efectuat, $L = \int_h^\infty \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2} dx = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h}$.

*

36. Pentru un moment de timp oarecare t, capacitățile condensatoarelor se vor manifesta la valorile: $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d + vt}$ și $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - vt}$ iar sarcinile q_1 și q_2 pe cele două condensatoare legate în paralel, la valorile: $q_1 = C_1 \Delta\varphi$ și $q_2 = C_2 \Delta\varphi$, $\Delta\varphi$ fiind diferența de potențial comună aplicată pe cele două condensatoare. Conservarea sarcinii presupune ca: $Q = q_1 + q_2$.

Rezultă, $q_1 = \frac{Q(d - vt)}{2d}$ și $q_2 = \frac{Q(d + vt)}{2d}$. Se obține pentru variațiile Δq_1 și Δq_2 o sarcină electrică pe cele două condensatoare în timpul deplasării plăcilor: $\Delta q_1 = -\frac{Qvt}{2d}$ și $\Delta q_2 = \frac{Qvt}{2d}$.

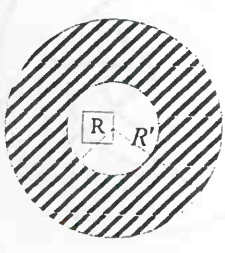
Se observă că scăderea sarcinii pe unul din condensatoare este egală cu creșterea sarcinii pe celălalt condensator. Intensitatea curentului în circuit, va fi $I = -\frac{\Delta q_1}{t} = \frac{\Delta q_2}{2} = \frac{Qv}{2d}$.

Prin firele de legătură curentul circulă de la placa pozitivă a condensatorului ale cărei plăci se depărtează spre placa pozitivă a celuilalt condensator.

*

37. Considerăm o sarcină Q distribuită pe sferă. În virtutea simetriei această distribuție va fi uniformă. Aplicăm teorema lui Gauss:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} \text{ pentru } R < r < R' \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \text{ pentru } r > R' \end{cases}$$



Potențialul conductorului va fi:

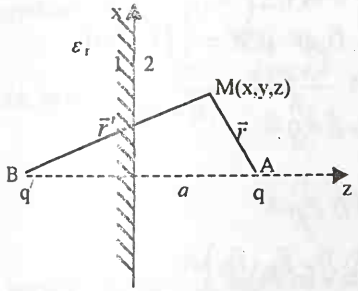
$$\varphi = \int_0^\infty E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_R^{R'} \frac{dr}{r^2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R'}^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\varepsilon_r} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) + \frac{1}{R'} \right]$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar capacitatea: $C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r RR'}{R' + (\varepsilon_r - 1)R}$

*

38. Mediul dielectric 1 se polarizează sub acțiunea sarcinii q. Vom folosi metoda imaginilor ce ia în considerare influența mediului polarizat concretizată prin potențialele de tip coulombian atribuite unor sarcini punctiforme fictive.



Vom desemna cu 2 mediul (vid) în care se află sarcina q plasată în A. Fie B simetricul lui A în raport cu suprafața de separație. Presupunem în punctul M un potențial de forma:

$\varphi_1(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''}{r'}$ produs de mediul 1 și

$\varphi_2(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}\right)$ produs de mediul 2.

Impunem condiția de continuitate a potențialului și a amplitudinii câmpului pe suprafața de separație urmând a evalua sarcinile echivalente q' și q'' definite de prezența dielectricului și fictive. Din figură se observă că $r^2 = x^2 + y^2 + (z-a)^2$ și $r'^2 = x^2 + y^2 + (z+a)^2$. În baza continuității potențialului și câmpului pe suprafața de separație $\varphi_1|_{z=0} = \varphi_2|_{z=0}$; $\varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)\Big|_{z=0}$

și observând că pentru $z = 0$, $r = r'$ obținem

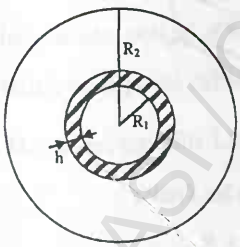
$$\begin{cases} q'' - q' = q \\ \varepsilon_r q'' + q' = q \end{cases}$$

Rezultă $q' = \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}q$ și $q'' = \frac{2}{1+\varepsilon_r}q$ astfel că în expresia potențialului $\varphi_2(M)$ primul termen reprezintă câmpul propriu al sarcinii q iar termenul al doilea, contribuția mediului polarizat care acționează în afara dielectricului ca și sarcina punctiformă q' plasată în B.

Forța cu care dielectricul atrage sarcina q este dată de $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}$ și cum $\varepsilon_r > 1$, această forță este atractivă. Rezultă că sarcina q' are semn contrar sarcinii q.

*

39. Aplicăm teorema lui Gauss și găsim



$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}, R_1 < r < R_1 + h \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, R_1 + h < r < R_2 \end{cases}$$

Diferența de potențial între armături, va fi:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E(r)dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_r R_2} - \frac{1}{R_2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{1}{R_1 + h}\right)$$

Se obține pentru capacitatea condensatorului,

$$C = C(h) = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon_r R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{1}{R_1 + h}\right)^{-1}$$

Cum h este foarte mic, prin dezvoltare în serie, $C(h) \cong C(0) + C'(0)h$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Însă $C(0)=\dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}}$ este capacitatea condensatorului sferic în absența stratului dielectric și

deci $\delta C = C(h)-C(0)\approx \dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\cdot\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}{(R_2-R_1)^2}h$.

*

40. Energia W_0 a câmpului electrostatic, este $W_0=\dfrac{1}{2}\int \vec{E}_0\cdot\vec{D}_0 dV$ și $W=\dfrac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}dV$

Pe de altă parte,

$$\nabla\times\vec{E}_0=0 \qquad \nabla\times\vec{E}=0$$

și

$$\nabla\cdot\vec{D}_0=\rho \qquad \nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

Distribuția de sarcină fiind aceeași, $\delta W = W-W_0=\dfrac{1}{2}\int\left(\vec{E}\cdot\vec{D}-\vec{E}_0\cdot\vec{D}_0\right)dV$

Cum

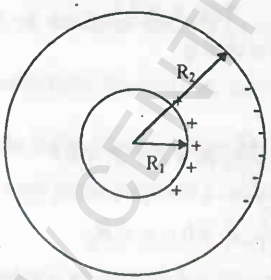
$$\vec{D}_0=\varepsilon_0\vec{E}_0 \text{ și } \vec{D}=\vec{E}+\vec{P}$$
$$\vec{E}\cdot\vec{D}_0-\vec{E}_0\cdot\vec{D}=-\vec{P}\cdot\vec{E}_0$$

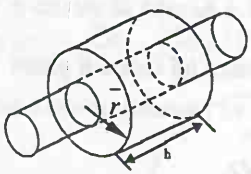
Adunând și scăzând în paranteză această expresie, se obține sub integrală,
$\vec{E}\cdot\vec{D}-\vec{E}_0\cdot\vec{D}_0=\vec{E}\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)+\vec{E}_0\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)-\vec{P}\cdot\vec{E}_0$ și cum $\int\vec{E}\cdot\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)dV=0$ iar $\vec{E}=-\nabla\varphi$ și ținând seama că distribuția de sarcini este mărginită astfel că potențialul φ va scădea cel puțin ca $1/r$ iar câmpul ca $1/r^2$, rezultă: $\vec{E}\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)=-\nabla\left[\varphi\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)\right]$. Pe de altă parte $\nabla\cdot\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)=0$ și integrala de volum se transformă într-o integrală de suprafață care se anulează datorită comportării la infinit a mărimilor conținute sub integrant, motiv pentru care și $\int\vec{E}_0\cdot\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)dV=0$.

Se obține, in definitiv, $\delta W=W-W_0=-\dfrac{1}{2}\int\vec{P}\vec{E}_0 dV$.

*

41





Notăm cu τ sarcina electrică a unității de lungime. Utilizăm teorema lui Gauss

$$E(r)\cdot 2\pi rh=\frac{\tau h}{\varepsilon_0}. \text{Rezultă, } E(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\tau}{r}, & r>R\\ 0, & r<R\end{cases}$$

Dacă avem doi cilindri coaxiali intensitatea câmpului electric în porțiunea dintre cilindri pentru $R_1\le r\le R_2$ rezultă din această relație, în timp ce pentru $r>R_2$ și $r<R_1$, $E=0$.
Considerăm deci un condensator format din doi cilindri coaxiali de lungime l, fiecare armătu-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ră fiind încărcată cu sarcina q, $\tau = \frac{q}{l}$. Dacă între armături avem un dielectric cu permitivitatea relativă ε_r, câmpul între armături, este: $E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot\frac{q}{lr}$ iar diferența de potențial între armături este $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\ln\frac{R_2}{R_1}$ și capacitatea condensatorului, va fi $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$. Notând cu $d = R_2 - R_1$, în cazul $d << R_1$,

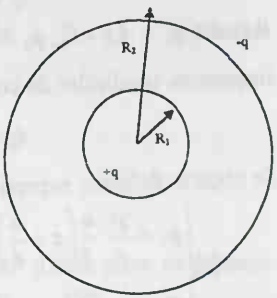
$$\ln\frac{R_2}{R_1} = \ln\left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{d}{R_1}\right) \approx \frac{d}{R_1}.$$

Întrucât dacă $\alpha << 1$, $\ln(1+\alpha) \approx \alpha$, $C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l R_1}{d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$, $S = 2\pi l R_1$ fiind aria suprafeței armăturii. Se obține astfel capacitatea unui condensator plan.

*

42. Câmpul electric $E(r)$ în interiorul dielectricului așa cum rezultă prin aplicarea teoremei lui Gauss, se exprimă prin:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}, R_1 < r < R_2 \\ 0, \quad \text{pentru } r < R_1 \text{ și } r > R_2 \end{cases}$$



Diferența de potențial dintre armături

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

În definitiv rezultă expresia capacității condensatorului sferic: $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

Și din această expresie se poate deduce expresia capacității condensatorului plan:

Într-adevăr, notând $d \equiv R_2 - R_1$, în cazul $d << R_1$, $R_1 \cong R_2 = R$ și $4\pi R^2 = S$. Rezultă $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$ relație ce exprimă capacitatea unui condensator plan.

*

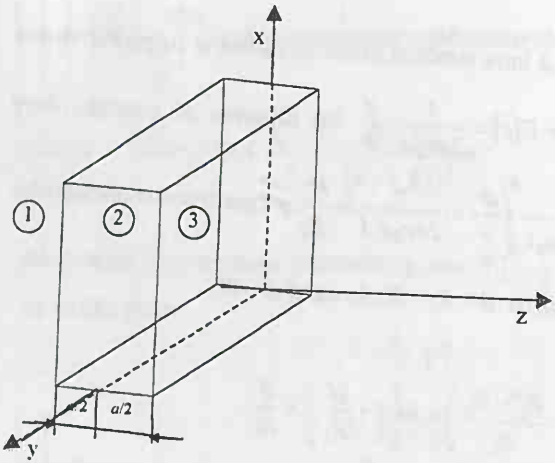
43. Scriem ecuațiile Laplace și Poisson pentru zonele 1,2 și 3 din figură.

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} = 0, z \le -\frac{a}{2}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dz^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon}; -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{dz^2} = 0, z \ge \frac{a}{2}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Prin integrarea acestor ecuații, obținem:

$$\varphi_1 = A_1 z + B_1$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon} z^2 + A_2 z + B_2$$

$$\varphi_3 = A_3 z + B_3$$

Punem condiția ca în centrul plăcii, potențialul și câmpul electric să fie nule.

$$\varphi_2(0) = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

$$\left.\frac{d\varphi_2}{dz}\right|_{z=0} = A_2 = 0$$

Impunem condițiile de continuitate pentru câmp și potențial la limitele de separație între medii

$$\varphi_1\left(-\frac{a}{2}\right) = \varphi_2\left(-\frac{a}{2}\right);\ \left.\frac{d\varphi_1}{dz}\right|_{z=-\frac{a}{2}} = \left.\frac{d\varphi_2}{dz}\right|_{z=-\frac{a}{2}};\quad \varphi_2\left(\frac{a}{2}\right) = \varphi_3\left(\frac{a}{2}\right);\ \left.\frac{d\varphi_2}{dz}\right|_{z=\frac{a}{2}} = \left.\frac{d\varphi_3}{dz}\right|_{z=\frac{a}{2}}$$

Rezultă: $\varphi_1 = A_1 z + B_1;\ \varphi_2 = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon} z^2;\ \varphi_3 = A_3 z + B_3$. Rezolvând sistemul de ecuații rezultat prin impunerea condițiilor de continuitate, rezultă valorile constantelor:

$$A_1 = \frac{\rho}{\varepsilon}\cdot\frac{a}{2};\ A_3 = -\frac{\rho}{\varepsilon}\cdot\frac{a}{2};\ B_1 = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon};\ B_2 = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon}$$

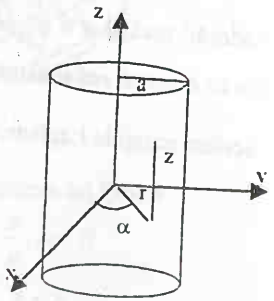
Se obțin în definitiv expresiile potențialelor și câmpurilor în cele trei zone:

$$(1)\begin{cases}\varphi_1 = \dfrac{\rho}{\varepsilon}\cdot\dfrac{a}{2}\left(z + \dfrac{a}{4}\right)\\ E_{z_1} = -\dfrac{d\varphi_1}{dz} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}\cdot\dfrac{a}{2}\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}\varphi_2 = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\rho}{\varepsilon} z^2\\ E_{z_2} = -\dfrac{d\varphi_1}{dz} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} z\end{cases}\qquad (3)\begin{cases}\varphi_3 = \dfrac{\rho}{\varepsilon}\cdot\dfrac{a}{2}\left(-z + \dfrac{a}{4}\right)\\ E_{z_3} = -\dfrac{d\varphi_3}{dz} = +\dfrac{\rho}{\varepsilon}\cdot\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

Soluțiile *(1)- (3)* corespund zonelor respective definite de $z < -a/2$, $-a/2 < z < a/2$ și $z > a/2$.

*

44. Potențialul generat de această distribuție de sarcini rezultă prin integrarea ecuațiilor Laplace și Poisson. În coordonate cilindrice (r, α, z) laplaceianul se scrie $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$. Potențialul φ va depinde numai de r și $\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)$, astfel că ținând seama de ecuația Poisson se poate scrie:



$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d\varphi_1}{dr}\right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}, \text{ pentru } 0 < r < a\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d\varphi_2}{dr}\right) = 0, \text{ pentru } r > a\end{cases}$$

Prin integrarea acestor relații, se obțin soluțiile: $\varphi_1 = -\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon} r^2 + A_1 \ln r + B_1$

$$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum însă φ trebuie să fie finit în orice punct şi cum pentru $r\to 0$, $ln\, r\to\infty$, rezultă în mod necesar $A_1 = 0$. Vom norma potenţialul pe axul cilindrului considerând $\varphi_1(0) = 0$ ceea ce presupune $B_1 = 0$. Impunem încă condiţiile de continuitate ale potenţialului şi câmpului pe suprafaţa cilindrului.

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) \text{ şi } \frac{d\varphi_1}{dr}\bigg|_{r=a} = \frac{d\varphi_2}{dr}\bigg|_{r=a} \text{ în expresiile}$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}r^2 \text{ şi } \varphi_2 = A_2 \ln r + B_2$$

Se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} A_2 \ln a + B_2 = -\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2 \\ \frac{A_2}{a} = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2 \\ B_2 = -\frac{\rho a^2}{4\varepsilon} + \frac{\rho a^2 \ln a}{2\varepsilon} \end{cases}$$

Rezultă

$$\varphi_1(r) = -\frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}r^2 \text{ pentru } 0 < r < a$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2 \ln r + \frac{1}{2}a^2\frac{\rho}{\varepsilon}\ln a - \frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2 = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2 \ln\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{\rho}{\varepsilon}a^2 \text{ pentru } r > a$$

astfel că pentru intensitatea câmpului electric $E(r)$ se obţin expresiile:

$$E(r) = \begin{cases} -\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}r \text{ pentru } 0 < r < a \\ -\frac{d\varphi_2}{dr} = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{a^2}{r} \text{ pentru } r > a \end{cases}$$

*

45.

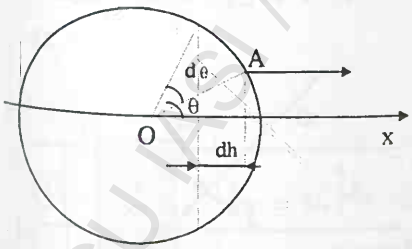
a) Valoarea maximă a gradientului de potenţial în dielectricul dintre sfere se produce pe suprafaţa sferei interioare: $E_{max} = \frac{\phi R}{r(R-r)} = 1{,}05 \times 10^5 \frac{V}{m}$.

b) Minimul funcţiei $E_{max} = E_{max}(r)$ se obţine pentru: $r = \frac{R}{2} = 10{,}5\,cm$;

c) $W = C\phi^2 = 13 \times 10^{-2} J$.

*

46. Densitatea superficială a sarcinilor induse într-un punct A de pe suprafaţa sferei pentru care raza care trece prin acest punct face un unghi θ cu direcţia polarizării $\vec{P}$ este $\sigma_p = P\cos\theta$.



Suprafaţa zonei sferice delimitate pe sferă de conurile cu deschideri 2θ şi $2(\theta + d\theta)$ este $dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ şi conţine sarcina $dQ = \sigma_p dS = 2\pi PR^2 \sin\theta\cos\theta d\theta$ care produce în centrul O al sferei un câmp electric ce se proiectează pe direcţia câmpului exterior aplicat, la valoarea: $dE' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{R^2}\cos\theta$ din care rezultă: $E' = \int dE' = -\frac{P}{2\varepsilon_0}\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{P}{2\varepsilon_0}\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^\pi = -\frac{P}{3\varepsilon_0} = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_1}{3\varepsilon_0}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se obține: $E_t = E + E' = \frac{3E}{\varepsilon_r + 2}$.

*

47. Notăm cu σ_a densitatea de sarcină de pe armături în absența dielectricului, σ densitatea de sarcină de pe armături în prezența dielectricului și cu σ_p densitatea sarcinilor de polarizare de pe suprafața dielectricului, urmare a polarizării acestuia. Câmpul în dielectric va rezulta din diferența $\sigma - \sigma_p$. Câmpul electric în absența dielectricului este : $E_a = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0} = \frac{U}{d}$ iar câmpul în dielectric: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma - \sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{U}{d}$ de unde rezultă: $\sigma_p = \varepsilon_0 E(\varepsilon_r - 1) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{U'}{d}$.

În cazul 1), $U' = U$

a) $\sigma_p = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{U}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}(6-1) \cdot \frac{10^3}{2{,}2 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^2}$

b) $\sigma - \sigma_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r E - \varepsilon_0 E_a$ și cum $E = E_a = \frac{U}{d}$, $\sigma - \sigma_a = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{U}{d} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^2}$

Așadar, datorită sursei de tensiune U constantă densitatea de sarcină pe armături a crescut cu $\sigma_p = \sigma - \sigma_a$

2) În acest caz, $Q = const.$

- Înainte de introducerea dielectricului, $E_a = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0} = \frac{U}{d} \Leftrightarrow \sigma_a d = \varepsilon_0 U$.
- După introducerea dielectricului, $E = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{U'}{d} \Leftrightarrow \sigma_a d = \varepsilon_0 \varepsilon_r U'$. Rezultă: $U' = \frac{U}{\varepsilon_r}$

a) $\sigma_p = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{U'}{d} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{U}{\varepsilon_r d} = 3{,}3 \cdot 10^{-6} \frac{c}{m^2}$

b) $\sigma = \sigma_a$ adică densitatea de sarcină pe armăturile condensatorului nu se modifică (Q = const.)

*

48. Intensitatea câmpului electric în dielectric este: $E = E_a - E_p = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$.

Rezultă $Q_p = Q_a \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$. Sarcina Q_a cu care se încarcă condensatorul în absența dielectricului, va fi: $Q_a = C_a \Delta\varphi = C\frac{\Delta\varphi}{3} = \varepsilon_r C_a \frac{\Delta\varphi}{3}$. Rezultă $\varepsilon_r = 3$ și $Q_a = C_a \Delta\varphi = 2{,}1\mu C$.

Se obține $Q_p = 1{,}4\mu C$.

49.

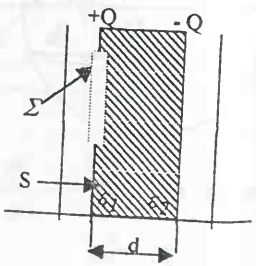
*

a). Aplicăm teorema lui Gauss suprafeței cilindrice

$$\iint_{\Sigma} \vec{D}\, d\vec{S} = \iint_{\Sigma} D \cdot dS = D\Delta S = \Delta Q$$

în care Σ' este porțiunea din Σ care traversează dielectricul, deoarece în conductor, $D = 0$. Obținem,

$$D = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \sigma_s = \frac{Q}{S}$$



BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi $E(x)=\frac{D}{\varepsilon(x)}=\frac{Q}{S\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x\right)}$. Diferenţa de potenţial între cele două armături este

$\varphi_1-\varphi_2=\int_0^d E(x)dx=\frac{Qd}{S(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ iar capacitatea condensatorului plan cu dielectric neomogen $C=\frac{Q}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)S}{d\ln\varepsilon_2/\varepsilon_1}=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1})S}{d\ln\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}}$ şi înlocuind valorile, se obţine $C=1,97pF$.

b). Densităţile de suprafaţă şi volum ale sarcinilor electrice de polarizare se calculează cu ajutorul legii ce exprimă legătura între inducţie,câmp şi intensitatea de polarizare (polarizaţie) $\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}$.

Avem, $\sigma_{p_1}=-P(0)=-[\varepsilon(0)-\varepsilon_0]E(0)=-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\frac{Q}{S\varepsilon_1}$; $\sigma_{p_2}=P(0)=[\varepsilon(d)-\varepsilon_0]E(d)=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\frac{Q}{S\varepsilon_2}$

şi densitatea volumică de sarcină $\rho(x)=-\nabla\vec{P}=-\frac{d}{dx}\{[\varepsilon(x)-\varepsilon_0]E(x)\}=\frac{Q\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{Sd\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x\right)^2}$

c).Să notăm cu Σ_d suprafaţa închisă care mărgineşte volumul ocupat de dielectric. Sarcina totală de polarizaţie din volumul dielectricului, este:

$Q_{p_V}(\Sigma_t)=\int\limits_{V(\Sigma_t)}\rho_p dV=-\frac{Q\varepsilon_0}{Sd}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\int\frac{Sdx}{\varepsilon^2(x)}=-Q\varepsilon_0\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2(x)}=-\frac{Q\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ iar sarcina totală de polarizaţie de pe suprafaţa închisă Σ_t este: $Q_p(\Sigma_t)=S(\sigma_{p_1}+\sigma_{p_2})=\frac{Q\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$

Se observă că $Q_{pV}(\Sigma_t)+Q_p(\Sigma_t)=0$.

*

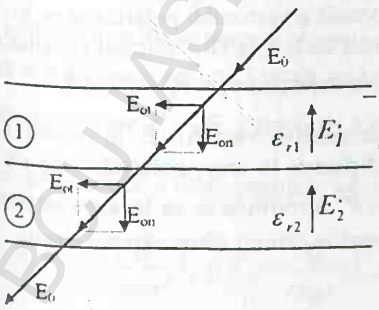
50.

a).Intensitatea de polarizare este egală numeric cu densitatea de sarcină σ_p de pe feţele dielectricului . $P=\chi\varepsilon_0E=\sigma_p$ de unde $\sigma_p=\chi\varepsilon_0\frac{U}{d}=2,65\cdot10^{-5}\frac{C}{m^2}$.

b).Avem, $\sigma_p=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E=\chi\varepsilon_0\frac{U}{d}$. Rezultă $\chi=\varepsilon_r-1$, deci $\varepsilon_r=4$ şi densitatea de sarcină pe armăturile condensatorului, va fi $\sigma=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{U}{d}=3,54\cdot10^{-5}\frac{C}{m^2}$.

*

51.



$$E_{1n}=E_{0n}-E'_1=E_{0n}-\frac{\sigma'_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_{2n}=E_{0n}-E'_2=E_{0n}-\frac{\sigma'_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_{2n}=E_{0n}-E'_2=E_{0n}-\frac{\sigma'_2}{\varepsilon_0}$$

La suprafaţa de separare a dielectricilor 1şi2 com-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ponenta tangențială a vectorului $\vec{E}$ nu se schimbă $E_{1t} = E_{2t} = E_{0t}$. Putem scrie: $\sigma_1' = \lambda_{e1}\varepsilon_0 E_{1n}$ și $\sigma_2' = \lambda_{e2}\varepsilon_0 E_{2n}$, astfel că:

$$E_{1n} = E_{0n} - \frac{\lambda_{e1}\varepsilon_0 E_{1n}}{\varepsilon_0} = \frac{E_{0n}}{1+\lambda_{e1}} = \frac{E_{0n}}{\varepsilon_{rc1}}$$

$$E_{2n} = E_{0n} - \frac{\lambda_{e2}\varepsilon_0 E_{2n}}{\varepsilon_0} = \frac{E_{0n}}{1+\lambda_{e2}} = \frac{E_{0n}}{\varepsilon_{rc2}}$$

Se constată că la suprafața de separare a doi dielectrici componenta normală a intensității câmpului electric variază în salturi. Avem de asemenea,

$$D_{1n} = \varepsilon E_{1n} = \varepsilon_0\varepsilon_{rc1}E_{1n} = \varepsilon_0 E_{0n}\ D_{2n} = \varepsilon E_{2n} = \varepsilon_0\varepsilon_{rc2}E_{2n} = \varepsilon_0 E_{0n} \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$D_{1t} = \varepsilon_0\varepsilon_{rc1}E_{1t} = \varepsilon_0\varepsilon_{rc1}E_{0t};\ D_{2t} = \varepsilon_0\varepsilon_{rc2}E_{2t} = \varepsilon_0\varepsilon_{rc2}E_{0t} \Rightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

Componenta normală a inducției electrice $\vec{D}$ nu variază în timp ce componenta tangențială, variază. $E(r) = E_0 - E_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2\sigma_1'}{r^2} \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow$, $E(R_1) \sim \frac{1}{R_1^2}$, deci:

$$\frac{E(R_1)}{E(r)} = \frac{r^2}{R_1^2} \Rightarrow E(r)\frac{r^2}{R_1^2} = E(R_1).$$

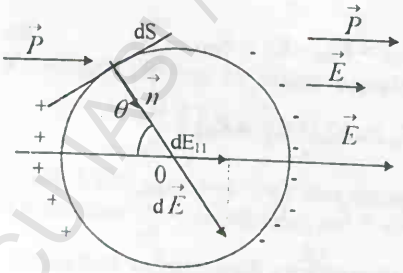
Cum $\vec{E}(R)$ este perpendicular pe planul tangent sferei de rază R_1, are direcția radială și

$$\sigma_1' = \chi_e\varepsilon_0 E(R_1) = \chi_e\varepsilon_0 E(r)\cdot\frac{r^2}{R_1^2};$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2\chi_e\varepsilon_0 E(r)\cdot r^2}{r^2 R_1^2} = E_0(r) - \chi_e E(r)$$

ceea ce conduce la: $E(r)(1+\chi_e) = E_0(r) \Rightarrow \varepsilon_r = 1+\chi_e \Rightarrow E(r) = \frac{E_0(r)}{\varepsilon_r}$ și $D = \varepsilon E(r) = \varepsilon_0 E_0$.

Întrucât în interiorul dielectricului intensitatea câmpului electric variază proporțional cu $1/r^2$, $\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \Rightarrow q_1' = q_2'$ și deci pentru $r > R_2$ câmpul creat de aceste două sarcini se anihilează reciproc: $r > R_2$, $E' = E'_2 - E'_1 = 0 \Rightarrow E = E_0$. Pentru $R_1 = R$ și $R_2 = \infty$ suntem în cazul unei sfere de rază R încărcată cu sarcina q aflată într-un mediu dielectric. Intensitatea câmpului electric în interiorul dielectricului, va fi $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon_r R^2}$, expresie evidentă în cazul dielectricului omogen și infinit.



*

52. Componenta normală a vectorului polarizație pe suprafața sferică variază de la P la O implicând și variația densității superficiale desarcină $\sigma' = P_n = P\cos\theta$.

Din considerente de simetrie vectorul $\vec{E}$ în punctul O este același ca în dielectric. În urma polarizării, pe elementul de arie $dS = R^2\sin\theta d\theta d\psi$ se va localiza sarcina $dq = \sigma' dS$ care creează în centrul sferei câmpul electric

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma' dS}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\cos\theta R^2 \sin\theta d\theta d\psi}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P\cos\theta\sin\theta d\theta d\psi$ ce admite o componentă paralelă $dE_{//} = dE\cdot\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\psi$. Prin integrare, rezultă câmpul electric suplimentar $E_{//}$ datorat polarizării: $E_{//} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\psi = \frac{1}{3}\frac{P}{\varepsilon_0}$. Ca urmare, câmpul total în centrul sferei va fi $\vec{E} + \frac{1}{3}\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$.

*

53. Considerăm o sferă curentă de rază $r < R$ ce se dezvoltă din centrul sferei dielectrice şi "mătură" întregul volum al dielectricului apoi aplicăm teorema lui Gauss prin suprafaţa acestei sfere curente $\oint \vec{D}d\vec{S} = D4\pi r^2 = \varepsilon_0\left(\frac{r}{R}+2\right)E4\pi r^2$ cu sarcina interioară $Q_{int} = \frac{r^3}{R^3}Q$. Avem:

- pentru $r < R$, $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{r}{r+2R}$;

- pentru $r > R$ $\oint \vec{D}d\vec{S} = D4\pi r^2 = \varepsilon_0 E4\pi r^2$ cu sarcina interioară, $Q_{int} = Q$ şi în definitiv, $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

*

54. Simetria sferică presupune orientarea vectorilor $\vec{E}$, $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ în direcţia radială.

Vectorul polarizaţie $\vec{P}$ verifică ecuaţia de trecere: $\vec{n}\cdot\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) = -\sigma_p$, în care indicele 1 se referă la interiorul sferei iar indicele 2 la exteriorul ei. Avem: $\vec{P}_2 = 0$, $\vec{P}_1 = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}\,|_{r\to R}$.

Pentru $r > R$, $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q}{r^2}$. Combinând ultimele două ecuaţii, se obţine $\sigma_p = \frac{\varepsilon_0\chi_e}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q}{R^2}$. Din relaţiile: $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$ şi $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1+\chi_e$, deducem $\sigma_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r}\cdot\frac{q}{R^2}$.

*

55. $\rho_p = -\nabla\vec{P} = 0$, $\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n} = P\cos\theta$.

O astfel de distribuţie poate fi obţinută cu două sfere S_1 şi S_2 descrise în enunţ care conduc de fapt la o densitate volumică totală nulă şi la o densitate superficială $\sigma = a\rho\cos\theta$.

Prin identificare $\vec{P} = \rho\vec{a}$. Câmpurile E_1 şi E_2 ale acestor sfere se calculează din teorema lui Gauss. Folosind $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, pentru $r < R$: $\vec{E}_1 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M}$ şi $\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M}$, în timp ce pentru $r > R$, $\vec{E}_1 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{l}_n$ şi $\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{l}_n$, cu $Q = \frac{4}{3}R^3\rho$ şi $\vec{l}_n = \frac{\vec{r}}{r}$.

ECU JASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Comparând câmpurile se constată că :

– în exteriorul sferei polarizate câmpul (deci şi potenţialul) este cel al unui dipol de moment $\vec{p} = Q\vec{a}$, $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\vec{a} = \frac{4\pi}{3}R^3\vec{P}$. De aici, $\vec{E}_e = \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^5}\left[3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}\right]$ şi $\varphi_e = \frac{R^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}$.

– în interiorul sferei polarizate $\vec{E}_i = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$ şi $\rho\cdot\overrightarrow{O_1O_2} = \rho\cdot\vec{a} = \vec{P}$.

Deci $\vec{E}_i = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$, câmpul este uniform. Dacă Ox desemnează axa dirijată după O_1O_2, potenţialul φ_i este $\varphi_i = \frac{P}{3\varepsilon_0}x + const$. Exprimând continuitatea potenţialului la suprafaţa sferei se găseşte $const. = 0$; prin urmare, $Px = \vec{P}\cdot\vec{r}$; $\varphi_i = \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{3\varepsilon_0}$, cu $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

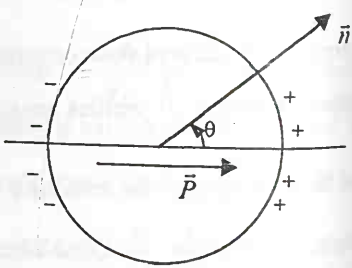
*

56. $d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\vec{l}_n dV}{r^2}$, $\vec{l}_n = \frac{\vec{r}}{r}$. Cum $\vec{P}$ este uniformă în volumul sferei,

$$\varphi = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\vec{l}_u dV}{r^2} = \vec{P}\iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{l}_n dV}{r^2}$$

Integrala evocă un câmp electrostatic. Pentru a evidenţia aceasta se multiplică şi se împarte cu ρ scalar uniform (densitate volumică de sarcină).

$\varphi = \frac{\vec{P}}{\rho}\iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho\vec{l}_n dV}{r^2} = \frac{\vec{P}}{\rho}\vec{E}^*$ unde $\vec{E}^*$ este câmpul creat de o densitate uniformă de sarcină în volumul V.



Pentru o sferă uniform încărcată, calculul lui $\vec{E}^*$ este legat de teorema lui Gauss.

$$r < R,\ \vec{E}^* = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r};\ r > R,\ \vec{E}^* = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{l}_n$$

de unde şi potenţialele corespunzătoare $r < R,\ \varphi_i = \frac{\vec{P}\vec{r}}{3\varepsilon_0}$; $r > R,\ \varphi_e = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{P}\cdot\vec{r}\right)$.

Se regăsesc rezultatele problemei precedente $\vec{E}_i = -\nabla\varphi_i = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$.

În exterior câmpul şi potenţialul sunt cele create de un dipol de moment $\vec{p} = \frac{4\pi}{3}R^3\cdot\vec{P}$

*

57. S-a arătat că potenţialul se calculează cu relaţia: $\varphi = \frac{\vec{P}}{\rho}\vec{E}^*$ unde $\vec{E}^*$ este câmpul creat de o distribuţie uniformă de sarcină repartizată în acelaşi volum a lui $\vec{P}$. Acest calcul al câmpului este o aplicaţie directă a teoremei Gauss.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Într-un plan perpendicular pe axa barei,

- $r < R,\ \vec{E}^* = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}$;
- $r > R, \vec{E}^* = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\cdot\vec{l}_n$. Introducând unghiul $\theta = \left(\vec{P}, \overrightarrow{OM}\right)$ se deduc expresiile potențialelor:
- $r < R,\ \varphi_i = \dfrac{\vec{P}\vec{r}}{2\varepsilon_0} = \dfrac{Pr\cos\theta}{2\varepsilon_0}$
- $r > R, \varphi_e = \dfrac{PR^2\cos\theta}{2\varepsilon_0 r} = \dfrac{R^2\vec{P}\cdot\vec{r}}{2\varepsilon_0 r^2}$

de unde rezultă câmpul electric $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{l}_r - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{l}_\theta$;

- $r < R, \vec{E}_i = -\dfrac{P}{\varepsilon_0}\left(\cos\theta\vec{l}_r - \sin\theta\vec{l}_\theta\right)$; $r > R, \vec{E}_e = \dfrac{PR^2}{2\varepsilon_0 r^2}\left(\cos\theta\vec{l}_r + \sin\theta\vec{l}_0\right)$

sau echivalent,

- $r < R,\ \vec{E}_i = -\dfrac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}$; $r > R, \vec{E}_e = \dfrac{R^2}{2\varepsilon_0 r^4}\left(2\left(\vec{P}\vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{P}\right)$.

*

58. $\rho_p = -\nabla\vec{P}$, $\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n}$.

În cazul unei simetrii sferice $\nabla\vec{A}(r) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2 A_r\right)$. Se obține $\rho_p = -\dfrac{A}{r^2}$, $\sigma_p = \dfrac{A}{R}$.

Sarcina totală a sferei este nulă. $Q = \int_0^R \sigma_p 4\pi r^2 dr + \sigma_p 4\pi R^2 = 0$.

- În cazul $r > R$, teorema lui Gauss conduce la $\vec{E}_{ext} = 0$. Potențialul este uniform și nul (valoarea de la infinit). $\varphi_{ext} = 0$.
- Pentru $r < R$, teorema lui Gauss se scrie $E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_o^r 4\pi u^2\rho(u)du = -4\pi\dfrac{Ar}{\varepsilon_0}$ de unde câmpul $\vec{E}$ și potențialul se anulează pentru $r = R$. Reunind rezultatele,
- $r < R$, $\vec{E}_i = -\dfrac{A}{r\varepsilon_0}\vec{l}_r$; $\varphi_i = \dfrac{A}{\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R}$;
- $r > R$, $\vec{E}_{ext} = 0$; $\varphi_{ext} = 0$.

Se remarcă faptul că potențialul φ și polarizarea $\vec{P}$ admit o singularitate în centrul O al sferei.

*

59. Fie Q sarcina unei porțiuni de lungime *l* a armăturii interne. Se aplică teorema Gauss pentru un cilindru de rază $r \in (a,b)$. $\vec{D} = \dfrac{Q}{2\pi rl}\vec{l}_r$ deci $\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_1}$, $\vec{E}_2 = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_2}$, $\vec{E}_3 = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_3}$. Calculând circulația câmpului E de la o armătură la alta se obține $\varphi = \dfrac{Q}{2\pi l}\left[\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{r_1}{a} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{r_2}{r_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_3}\ln\dfrac{r_3}{r_2}\right]$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Identificând $Q=C\Delta\varphi$ se obține: $C=\dfrac{2\pi l}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{r_1}{a}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{r_2}{r_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_3}\ln\dfrac{r_3}{r_2}}$.

*

60. Din teorema Gauss $\vec{D}=\dfrac{q}{4\pi}\cdot\dfrac{\vec{l}_r}{r^2}$, $\vec{l}_r=\dfrac{\vec{r}}{r}$. Deci pentru $r<r_1$, $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\vec{l}_r}{r^2}$, pentru $r_1<r<r_2$, $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\dfrac{\vec{l}_r}{r^2}$ iar pentru $r_2<r$, $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\vec{l}_r}{r^2}$;de unde $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ și deci $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, $\vec{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$. Evident că polarizarea $\vec{P}=\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\cdot\dfrac{q}{4\pi r^2}\cdot\vec{l}_r$ există numai în dielectric.($r_1<r<r_2$).

Polarizarea comportându-se ca $\dfrac{l_r}{r^2}$, $\nabla\vec{P}=0$. De aici se obțin sarcinile de polarizare (în conformitate cu orientarea normală): $\rho_p=-\nabla\vec{P}=0$, $\sigma_p(r_1)=\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon}\dfrac{q}{4\pi r_1}$, $\sigma_p(r_2)=\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\dfrac{q}{4\pi r_2}$.

Se observă că $\lim\limits_{r_1\to 0}\sigma_p(r_1)=-\infty$. Această sarcină superficială tinde spre o sarcină de polarizare punctuală $q_p=4\pi r_1\sigma_p(r_1)=-q\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}$.

*

61. Fie O centrul sferei, iar $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$.

- În cazul $r<a$, $\vec{E}_i=\vec{E}_0+\vec{E}_p=\vec{E}_0-\dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$.
- Pentru $r>a$, $\vec{E}_e=\vec{E}_0+\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\left(3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}\right)}{r^5}$ cu $\vec{p}=\dfrac{4\pi}{3}a^3\vec{P}$, sau $\vec{E}_e=\vec{E}_0+\dfrac{a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\left(3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}\right)}{r^5}$.

În continuare se va exprima $\vec{P}$ în funcție de $\vec{E}_0$. Scriind continuitatea pentru $\varepsilon_r\vec{E}$ și a lui $\vec{E}_0$, pentru $r=a$ se poate scrie $\vec{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$. În ambele cazuri(interior și exterior) se obține:

- Pentru $r<a$, $\vec{P}=\dfrac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\vec{E}_0$ cu $\vec{E}_i=\dfrac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\vec{E}_0$. Câmpul interior al sferei($r<a$) este uniform. Acest câmp derivă dintr-un potențial $\varphi_i=-\dfrac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\vec{E}\cdot\vec{r}$.
- Pentru $r>a$ potențialul este suma potențialului $-\vec{E}_0\vec{r}$ cu potențialul creat de $\vec{P}$; acesta se confundă cu potențialul unui dipol de moment $\vec{p}=\dfrac{4\pi a^3}{3}\vec{P}$,

Deci $\vec{p}=4\pi a^3\dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\vec{E}_0$ și $\varphi_e=-\left(\vec{E}_0\vec{r}\right)\left[1-\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{a^3}{r^3}\right]$.

Se observă că pentru $r=a$ este satisfăcută condiția de continuitate a potențialului.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

62. Se consideră un plan perpendicular pe axa barei şi se va lua $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Se ştie că

- $r < a$, $\vec{E}_i = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \vec{E}_0 - \dfrac{\vec{P}}{2\varepsilon_0}$;
- $r > a$, $\vec{E}_e = \vec{E}_0 + \dfrac{a^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{\left(2\left(\vec{P}\vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{P}\right)}{r^4}$.

Exprimând continuitatea lui $\varepsilon_r\vec{E}$ şi $\vec{E}_0$, pentru $r = a$ se exprimă $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_i$.

Se va obţine $\vec{P} = \dfrac{2\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + \varepsilon_0}\vec{E}_0$ şi $\vec{E}_i = \dfrac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}\vec{E}_0$.

* Câmpul interior ($r < a$) este uniform şi paralel cu $\vec{E}_0$ şi derivă din potenţialul

$$\varphi_i = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}\left(\vec{E}_0\vec{r}\right),$$

* În exterior ($r > a$) potenţialul este suma potenţialului $-\vec{E}_0\vec{r}$ din care derivă $\vec{E}_0$ şi a potenţialului $\dfrac{a^2}{2\varepsilon_0 r^2}\left(\vec{P}\vec{r}\right)$ din care derivă câmpul creat de $\vec{P}$. Înlocuind $\vec{P}$ cu expresia sa se obţine

$$\varphi_e = -\left(\vec{E}_0\vec{r}\right)\cdot\left[1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}\cdot\frac{a^2}{r^2}\right].$$

Expresia asigură continuitatea potenţialului pentru $r = a$.

*

63. Prin aplicarea teoremei Gauss se vede că în afara dielectricului, câmpul $\vec{E}$ este acelaşi în prezenţa sau în absenţa dielectricului. Variaţia de energie δU_e provine din diferenţa de energie cuprinsă între sferele de raze a şi b, unde va exista sau nu un dielectric. În cele două cazuri pentru orice punct $\vec{D} = \dfrac{q}{4\pi r^2}\vec{l}_u$ şi $w_e = \dfrac{E \cdot D}{2}$.

Se calculează energia cuprinsă între sferele de raze a şi b:

- în prezenţa dielectricului, $U_1 = \int_a^b w_e 4\pi r^2 dr = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon}\int_a^b \dfrac{dr}{r^2} = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left[\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right]$.
- în absenţa dielectricului, $U_2 = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right]$.

iar diferenţa de energie $\delta U_e = U_1 - U_2$:

$$\delta U_e = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}\left[1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]$$

$$\lim_{b\to\infty}\delta U_e = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

Această mărime corespunde energiei unei sarcini într-un mediu dielectric.

*

64. În vecinătatea sferei – prin aplicarea teoremei Gauss – $\vec{D}_1 = \sigma_1\vec{n}$ şi $\vec{D}_2 = \sigma_2\vec{n}$. Câmpul

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

devine $\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1 R^2}{\varepsilon_0 r_0^2}\vec{l}_r$ şi $\vec{E}_2 = \frac{\sigma_2 R^2}{\varepsilon r^2}\vec{l}_r$.

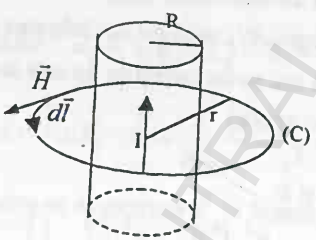
Se observă că un astfel de câmp derivă dintr-un potenţial φ care verifică ecuaţia $\nabla^2\varphi = 0$; prin urmare, polarizarea $\vec{P}$ în dielectric ce corespunde lui $\vec{E}_2$ este de forma $\frac{1}{r^2}$ şi deci $\rho_p = -\nabla\vec{P} = 0$. Continuitatea componentei tangenţiale E_t la suprafaţa de separare impune $\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon}$. Câmpul E_1 derivă din $\varphi_1 = \frac{\sigma_1 R^2}{\varepsilon_0 r}$; pentru $r = R$, φ_1 este prin continuitate egal cu potenţialul φ al sferei $\varphi = \frac{\sigma_1 R^2}{\varepsilon_0 r}$. De aici $\sigma_1 = \varepsilon_0\frac{\varphi}{R}$ şi $\sigma_2 = \varepsilon\frac{\varphi}{R}$.

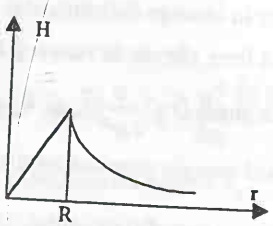
Folosind noţiunea de presiune electrostatică, rezultanta forţelor electrostatice după verticala descendentă, se scrie: $F = \pi R^2\left[\frac{\sigma_2^2}{2\varepsilon} - \frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon_0}\right] = \frac{\pi}{2}\varphi^2(\varepsilon - \varepsilon_0)$.

Principiul lui Arhimede arată că sfertul din volumul sferei care dislocuieşte fluidul dielectric corespunde greutăţii *mg*. Echilibrul se traduce deci prin $F = mg$, astfel că $\varphi = \sqrt{\frac{2mg}{\pi(\varepsilon - \varepsilon_0)}}$. Rezultatul este deci independent de raza R a sferei.

*

65.





În figură, vectorul $\vec{H}$ este tangent la curbă şi constant în modul, iar vectorii $\vec{H}$ şi $d\vec{l}$ sunt coliniari. Folosind legea circulaţiei (Ampére), $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = I \Rightarrow \oint_c H dl = H\oint_c dl \Rightarrow H = \frac{1}{2\pi r}$.

- Pentru $r < R$, curentul fiind repartizat uniform în secţiunea conductorului, se poate scrie: $I' = I\frac{r^2}{R^2}$ şi rezultă $H = I\frac{1}{2\pi R^2 r}$;
- Pentru $r > R$, $H\cdot 2\pi R = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi R}$. În sfârşit,
- Pentru $r = R$, $H = \frac{I}{2\pi R}$.

*

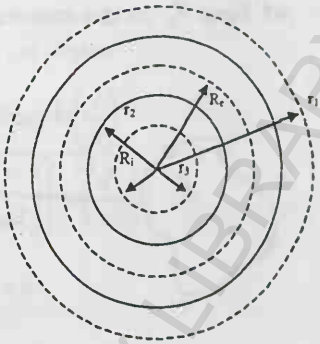
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

66.

a) $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{c_1} = I;\ H\cdot 2\pi r_1 = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r},\ (r>R_e);$

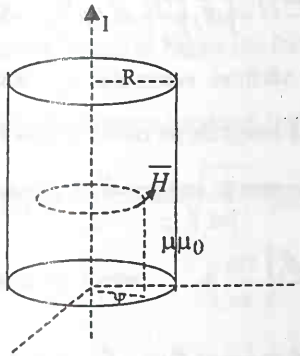
b) $\oint_{c_2} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{c_2} = \frac{r_2^2 - R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\cdot I; R_i < r < R_e$

c) $\oint_{c_2} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{c_3} = 0 \Rightarrow H = 0\ pentru\ r < R_i$



*

67. Liniile de forţă magnetice vor fi – în virtutea simetriei cercuri situate în plane perpendiculare pe axa conductorului cu centrele situate pe această axă, iar mărimea câmpului rămâne constantă de-a lungul unei linii de forţă.



Din legea circulaţiei (Ampére) $\oint \vec{H}d\vec{l} = H_\varphi 2\pi r$ şi pentru o distribuţie uniformă a curenţilor,

$$I_{int} = \begin{cases} \frac{r^2}{R^2} I, pentru\ r < R \\ I, pentru\ r > R \end{cases}$$

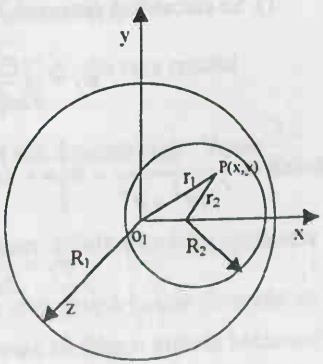
$$H_\psi(r) = \frac{I}{2\pi R^2} r\ \ pentru\ r < R\ şi$$

$$H_\psi(r) = \frac{I}{2\pi r},\ pentru\ r = R$$

Vectorul inducţie magnetică se obţine înmulţind pe $\vec{H}$ în interior cu μ şi în exterior cu μ_0.

*

68. Scriem densitatea de curent, $j = \frac{I}{\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)}$. În absenţa cavităţii, un curent având această densitate ar creea câmpul $H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1^2} r_1 = \frac{1}{2} j r_1$ perpendicular pe raza PO_1.



În coordonate carteziene, scriem:

$$H_{1x} = -H_1 \frac{y}{r_1} = -\frac{1}{2} jy\ ;\ H_{1y} = H_1 \frac{x}{r_1} = \frac{1}{2} jx$$

Contribuţia curentului care străbate secţiunea cilindrului O_2 ar fi $H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2^2} r_2 = \frac{1}{2} j r_2$ cu vectorul $\vec{H}_2$ perpendicular pe raza PO_2.

În coordonate carteziene, $H_{2x} = -H_2 \frac{y}{r_2} = -\frac{1}{2} jy\ ; H_{2y} = H_2 \frac{x-a}{r_2} = \frac{1}{2} j(x-a)$

Câmpul în cavitate rezultă din diferenţa $\vec{H}_1 - \vec{H}_2$. Obţinem,

$$H_x = H_{1x} - H_{2x} = 0\ ; \qquad H_y = H_{1y} - H_{2y} = \frac{1}{2} ja = \frac{al}{2\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)}$$

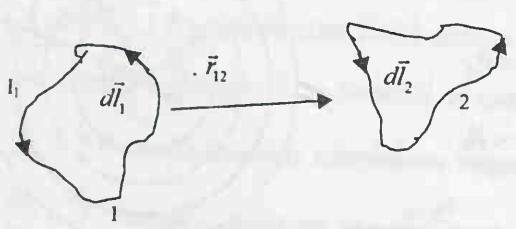
Câmpul magnetic în cavitate este uniform şi paralel cu axa Oy (perpendicular pe linia ce uneşte centrele O_1 şi O_2 ale secţiunilor normale ale cilindrilor).

*

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

69. Forța $\vec{F}_{12}$ cu care acționează curentul I_1 asupra curentului I_2 conform legii lui Laplace este

$$F_{12} = \oint_2 I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$



unde $\vec{B}_1$ este inducția magnetică a câmpului creat de primul curent dată de relația *Biot – Savart –Laplace:*

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r^2} \text{ cu } r = |r_{12}|.$$

Se obține: $\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \left(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}\right)}{r^3}$

sau $\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1\left(\vec{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2\right) - \vec{r}_{12}\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^2}$. Avem, $\oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1\left(\vec{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^2} = \oint_1 d\vec{l}_1 \oint_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r^3} d\vec{l}_2$ și $\frac{\vec{r}_{12}}{r^3} = -\nabla_2\left(\frac{1}{r}\right)$

unde ∇_2 se referă la derivări în raport cu coordonatele vârfului vectorului $\vec{r}_{12}$. Rezultă $\oint_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r^3} d\vec{l}_2 = -\oint_2 \nabla_2\left(\frac{1}{r}\right) \cdot d\vec{l}_2 = -\oint_2 d\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, în virtutea faptului că integrala pe contur închis dintr-o diferențială totală, este nulă. S-a obținut astfel că primul termen al integrantului conținut în expresia obținută pentru $\vec{F}_{12}$, este nul.

Rămâne astfel doar al doilea termen $\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{\vec{r}_{12}\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^3}$.

Analog, se obține $\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{\vec{r}_{21}\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^3}$ și cum $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$, rezultă $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

70.

1). Se calculează potențialul φ_1 în centrul geometric O_1 al cilindrului l.

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\frac{Q}{l} dx\right] \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right]$$

Știind că $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right|$ în aproximația $a \ll d \ll l$ se obține

$$\varphi_1 \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[ln\left(\frac{l}{a}\right) - ln\left(\frac{l}{d}\right)\right] = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} ln\left(\frac{d}{a}\right)$$

Procedând identic rezultă de asemenea $\varphi_2 \approx -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[ln\left(\frac{l}{a}\right) - ln\left(\frac{l}{d}\right)\right] = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon l} ln\left(\frac{d}{a}\right)$.

2). Din expresiile precedente, $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l} ln\frac{d}{a}$. Comparând cu forma $Q = \gamma l(\varphi_1 - \varphi_2)$ rezultă $\gamma = \pi\varepsilon_0 ln\frac{d}{a}$, $\gamma = 6{,}8 \cdot 10^{-12}\ F/m$

3). Calculele precedente conduc la rezultatele

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[Q_1 ln\left(\frac{l}{a}\right) + Q_2 ln\left(\frac{l}{d}\right)\right]; \varphi_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[Q_2 ln\left(\frac{l}{a}\right) + Q_1 ln\left(\frac{l}{d}\right)\right].$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde φ_1 şi φ_2 desemnează potenţialele celor doi cilindri.

Soluţiile Q_1 şi Q_2 se identifică cu relaţiile Maxwell $Q_i = \Sigma c_{ij} V_j$; se obţine

$$c_{11} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l \ln\left(\frac{l}{a}\right)}{\left[\ln\left(\frac{l^2}{ad}\right)\right]\left[\ln\left(\frac{d}{a}\right)\right]} = c_{22} \qquad c_{12} = c_{21} = \frac{-2\pi\varepsilon_0 l \ln\left(\frac{l}{a}\right)}{\left[\ln\left(\frac{l^2}{ad}\right)\right]\left[\ln\left(\frac{d}{a}\right)\right]}$$

4). Efectuând $l \to \infty$ se obţine: $\lim_{l\to\infty} \frac{c_{11}}{l} = \lim_{l\to\infty} \frac{c_{22}}{l} = -\lim_{l\to\infty} \frac{c_{12}}{l} = \gamma$.

*

71. Scriem densitatea de curent ce parcurge spaţiul dintre cei doi electrozi: $\vec{j} = -\rho\vec{v}$.

Valoarea vitezei se obţine din formula variaţiei energiei cinetice: $\frac{mv^2}{2} = eu \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$

Ecuaţia lui Poisson corelează tensiunea cu densitatea de sarcină spaţială ρ: $\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Se obţine $\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2eU}}$ echivalentă cu ecuaţia , $2\frac{dU}{dx}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) = \sqrt{\frac{m}{2eU}}\frac{dU}{dx}\frac{2j}{\varepsilon_0}$ pe care o scriem sub forma: $d\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 = \frac{2j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2eU}}dU$.

După integrare ţinând seama că j este constantă, $\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 = \frac{2}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\int\sqrt{\frac{1}{U}}dU = \frac{2j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2mU}{e}} + C_1$

Prin ipoteză, pentru $x = 0$, $\frac{dU}{dx} = 0$ şi $U = 0$. Rezultă $C_1 = 0$ şi $\frac{dU}{dx} = \sqrt{\frac{2j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2m}{e}}}U^{\frac{1}{4}}$

Prin integrarea ultimei ecuaţii, se obţine $\int_0^a U^{-\frac{1}{4}}dU = \sqrt{\frac{2j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{2m}{e}}\int_0^L dx$ din care rezultă

$j = \frac{4\sqrt{2}}{9L^2}\varepsilon_0\sqrt{\frac{e}{m}}U_a^{\frac{3}{2}}$ .Această relaţie exprimă o lege cunoscută sub denumirea de *"legea* $\frac{3}{2}$*"*.

*

72. Considerăm un inel elementar cu razele r şi $r + dr$. Rezistenţa radială a inelului elementar este dată de: $dR = \frac{\rho dr}{2\pi re}$ şi rezultă ca rezistenţă echivalentă a unei grupări serie de astfel de rezistenţe elementare: $R_r = \frac{\rho}{2\pi e}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi e}\ln\frac{r_2}{r_1} = 0{,}47\,\mu\Omega$ .Dacă inelul este parcurs de un curent circular,conductanţa G a inelului elementar este $dG = \frac{1}{\rho}\frac{edr}{2\pi r}$. Rezistenţa circulară a inelului este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări paralele de rezistori elementari a cărei conductanţă este: $G = \frac{e}{2\pi\rho}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{e}{2\pi\rho}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{R_c}$. Rezultă pentru rezistenţa circulară R_c

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a inelului, $R_c = \frac{2\pi\rho}{e}\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1} = 15{,}15\mu\Omega$. Se observă că $R_\square R_c = \left(\frac{\rho}{e}\right)^2$, adică produsul între rezistențele radială și circulară manifestate de inel nu depinde de razele inelului.

*

73. Puterea electrică ce se disipă în semiconductor este: $P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_0(1-\mu t)}$. Echilibrul termic se va stabili atunci când se va realiza egalitatea puterilor: $\frac{U^2}{R_0(1-\mu t)} = bt$.

Rezultă valorile temperaturilor de echilibru $t_{1,2} = \frac{1}{2\mu}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu U^2}{bR_0}}\right]$ pentru valori ale tensiunii $U \in \left(0, \sqrt{\frac{bR_0}{4\mu}}\right)$. Cantitatea $U_0 = \sqrt{\frac{bR_0}{4\mu}}$ exprimă valoarea maximă a tensiunii pentru care se poate stabili echilibrul termic.

*

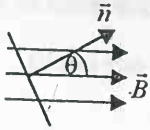
74.

a) Fluxul magnetic prin spiră este

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\theta = B_m\frac{\pi d^2}{4}\cos\theta\sin\omega t = \Phi_m \sin\omega t \text{ unde}$$

$$\Phi_m = B_m S\cos\theta$$

iar tensiunea electromotoare indusă în spiră,



$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega\Phi_m\cos\omega t = -B_m\cdot S\omega\cos\theta\cos\omega t = E_m\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_m = B_m S\omega\cos\theta$$

b). Valoarea instantanee a curentului indus în spiră este:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ unde } I_m = \frac{E_m}{R} = \frac{B_m S}{R}\omega\cos\theta$$

c). Sarcina electrică elementară ce străbate secțiunea normală a spirei, se scrie:

$$dQ = idt = \frac{e}{R}dt = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}\cdot dt = -\frac{1}{R}d\Phi;\ d\Phi = \Phi_m\omega\cos\omega t dt = B_m S\omega\cos\theta\cos\omega t dt$$

Rezultă $dQ = -\frac{B_m S}{R}\omega\cos\theta\cos\omega t dt$. și,

$$Q = \int_0^{T/4} dQ = -\frac{B_m S}{R}\omega\cos\theta\int_0^{T/4}\cos\omega t dt = -\frac{B_m S}{R}\cos\theta\sin\omega t\Big|_0^{T/4} = -\frac{B_m S}{R}\cos\theta$$

*

75. Scriem, legea lui Ohm: $\vec{j} = \gamma\vec{E} = \gamma\vec{E}_0\cos\omega t$.

Cum inducția electrică $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$, rezultă $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\omega\vec{E}_0$. Se obține $\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$ relație din care se estimează: pentru Cu: $\alpha = 1{,}1\cdot 10^{12}$; pentru solul argilos: $1{,}8$; pentru sticlă: $1{,}8\cdot 10^{-2}$.

BCUIASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

76. Putem scrie: $E = k\frac{1}{r}$ şi $U_0 = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = k\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = k\ln\frac{R_2}{R_1}$. Rezultă $k = \frac{U_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$ şi $E = \frac{U_0}{r\ln\frac{R_2}{R_1}}$.

Densitatea $\vec{j}$ a curentului între cilindri, este $\vec{j} = \gamma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$ astfel că se obţine pentru intensitatea curentului I între cilindri: $I = jS = 2\pi rlj$ sau $I = \frac{2\pi lU_0}{\rho\ln\frac{R_2}{R_1}}$ din care rezultă pentru rezistenţa R a grafitului, expresia: $R = \frac{U_0}{I} = \frac{\rho\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi l}$.

*

77. Se consideră o pătură sferică de rază r ($r_1 < r < r_2$) şi grosime dr. Rezistenţa electrică a acestei pături sferice, va fi $dR = \frac{\rho dr}{4\pi r^2}$. Rezistenţa totală a mediului conductor dintre sfere se obţine prin integrare: $R = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\rho}{4\pi r^2}dr = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

Pentru $r_2 \to \infty$ aceasta devine $R' = \lim_{r_2\to\infty}\frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\rho}{4\pi r_1}$.

Intensitatea curentului prin mediul conducător va rezulta la valoarea:

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R} = 4\pi\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho}\cdot\frac{r_1r_2}{r_2 - r_1}$$

*

78. Sarcina electrică dQ conţinută într-o coroană circulară de rază r şi de lăţime dr de pe disc, este $dQ = \sigma\cdot 2\pi rdr = \frac{2Q}{R^2}rdr$, unde σ reprezintă densitatea superficială de sarcină.

Cum discul se roteşte cu frecvenţa de n rotaţii pe secundă, sarcina electrică dQ trece de n ori pe secundă prin faţa unui plan normal pe disc care trece prin axul discului, echivalând cu un curent $dI = n\cdot dQ$. Acest curent creează în centrul discului un câmp de inducţie $dB = \mu_0\frac{dl}{2r}$.

Câmpul de inducţie total B în centrul discului se obţine prin integrare între 0 şi R:

$$B = \frac{\mu_0Qn}{R^2}\int_0^R dr = \frac{\mu_0Qn}{R} = 2{,}1\cdot10^{-6}\,tesla.$$

*

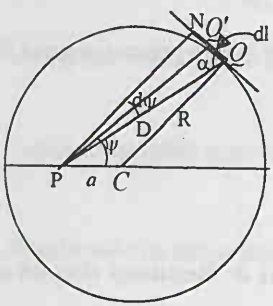
79. Vom observa că în virtutea legii Biot – Savart – Laplace, intensitatea câmpului magnetic H, creat de un conductor liniar filiform şi infinit de lung parcurs de curentul electric cu intensitatea I, la distanţa r de conductor este $H = \frac{I}{2\pi r}$ iar inducţia magnetică $B = \mu_0\mu_rH$. Din aceste relaţii se observă că B depinde de proprietăţile magnetice ale mediului, în timp ce H nu depinde de mediu. Pe de altă parte, câmpul electric între două plăci plane paralele şi infinite uniform distribuite cu sarcină electrică de densitate σ este caracterizat de intensitatea $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$ şi de inducţia electrică $D = \varepsilon_0\varepsilon_rE = \sigma$, relaţii ce exprimă faptul că $\vec{E}$ depinde de proprietăţile electrice ale mediului, în timp ce $\vec{D}$, nu depinde de mediu. Rezultă

BCU ŞTIINŢE CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

aşadar că $\vec{B}$ este analogul lui $\vec{E}$ ambele mărimi depinzând de proprietăţile mediului, iar $\vec{H}$ este analog cu $\vec{D}$.

*

80. Considerăm un element *dl* pe circumferinţa spirei echivalent cu un curent elementar *I dl*



care creează în punctul P inducţia $dB = \mu_0 \frac{Idl}{D^2}\sin\alpha$.

Aria triunghiului PQQ' este,

$$S_{\Delta PQQ'} = \frac{1}{2}D^2 d\psi = \frac{1}{2}|PN|dl = \frac{1}{2}D\sin\alpha\, dl$$

astfel încât $\sin\alpha\, dl = D d\psi$ şi $B = \mu_0 I \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{D}$.

Cum $D = |PQ| = a\cos\psi + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi}$, se obţine

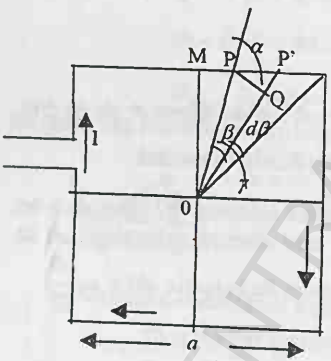
$$\frac{1}{D} = \frac{-a\cos\psi + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi}}{R^2 - a^2}.$$

Ţinând seama că $\int_0^{2\pi}\cos\psi d\psi = 0$ rezultă,

$$B = \mu_0 \frac{I}{R^2 - a^2}\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi}\,d\psi = \mu_0 \frac{4I}{R^2 - a^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2\sin^2\psi}\,d\psi$$

*

81. Considerăm elementul de curent $|PP'| = dl$. Curentul elementar *dl* generează în O un câmp



magnetic elementar $dH = \frac{Idl\sin\alpha}{4\pi r^2}$. Avem:

$$|PQ| = dl\sin\alpha = r d\beta \text{ şi } r = \frac{OM}{\cos\beta}$$

Se obţine $dH = \frac{I\cos\beta d\beta}{4\pi|OM|}$ cu $|OM| = \frac{a}{2tg\gamma}$, *a* fiind latura pătratului.

a). În cazul pătratului, unghiul β variază de la *0* la $\frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$ şi întrucât sunt opt semilaturi,

$$H_4 = \frac{4I}{\pi a}tg\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\cos\beta d\beta = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi a}$$

b) în cazul unui poligon regulat cu *n* laturi, $\gamma = \pi/n$,

$$H_n = \frac{nI}{\pi a}tg\frac{\pi}{n}\int_0^{\pi/n}\cos\beta d\beta = \frac{nI}{\pi a}tg\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$$

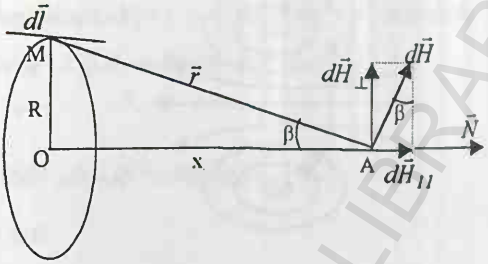
c) exprimăm ca funcţie de raza *R* a cercului circumscris poligonului cu *n* laturi: $a = 2R\sin\frac{\pi}{n}$;

$H_n = \frac{I}{2\pi R}n tg\frac{\pi}{n}$. Pentru $n \to \infty$, poligonul aproximează cercul de rază *R* iar $n\, tg\, \pi/4$ tinde către π. Se obţine astfel expresia intensităţii câmpului magnetic în centrul unei spire plane parcurse de curentul de intensitate *I*, $H = \frac{I}{2R}$.

*

BCUIASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

82. Elementul de curent $d\vec{l}$ va genera în A câmpul elementar $d\vec{H}$ care în virtutea relației Biot – Savart – Laplace va fi perpendicular pe planul format de tangenta în M la cerc și raza vectoare, $\vec{r}$. Din considerente de simetrie, componentele vectorului elementar $d\vec{H}$ perpendiculare pe normala $\vec{N}$ la planul spirei se vor anihila ca urmare a contribuțiilor elementelor de curent diametral opuse. Rămân doar componentele $dH_{//}$ ale căror efecte se însumează și astfel câmpul rezultat va fi orientat pe direcția OA.



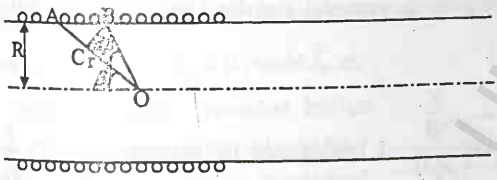
Putem scrie $dH_{//} = dH\sin\beta = \frac{R}{r}dH$ unde $dH = \frac{1}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\left(d\vec{l}\perp\vec{r}\right)$. Se obține $dH_{//} = \frac{1}{4\pi}\frac{Rdl}{r^2}$.

$r^2 = R^2 + x^2$. Prin integrare, rezultă:

$$H = \int dH_{//} = \frac{1}{4\pi}\frac{IR}{r^3}\oint dl = \frac{1}{4\pi}\frac{IR}{r^3}\cdot 2\pi R = \frac{1}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

*

83. Considerăm o lungime elementară |AB| de solenoid ce conține $n|AB|$ spire parcurse de curentul I. Elementul de curent conținut în segmentul elementar |AB| este echivalent cu un curent $I_1 = n\,|AB|\,I$ ce ar parcurge o singură spiră și care ar genera în O pe axul solenoidului un câmp magnetic elementar pe care îl vom descompune în două componente: $dH_{//}$ având direcția și suportul axului solenoidului și $dH_{\perp}$ perpendiculară pe ax.



În virtutea simetriei, componentele $dH_{\perp}$ ale elementelor de lungime diametral opuse se anihilează reciproc iar componentele $dH_{//}$ se însumează, sugerând integrarea după β. Avem:

$$\sin\beta = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\sin\beta}$$

$$dH_{//} = \frac{2\pi R^2 I_1}{4\pi r^3} = \frac{2\pi R^2 I}{4\pi r^3}\cdot n\cdot\frac{R}{\sin^2\beta}d\beta = \frac{1}{2}In\sin\beta\,d\beta$$

Se obține prin integrare, $H_{//} = \frac{1}{2}I\cdot n\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta d\beta = -\frac{1}{2}I\cdot n\cdot(\cos\beta)\Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$.

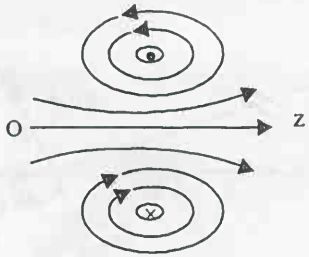
Pentru un solenoid infinit $\beta_1=0$ și $\beta_2=\pi$ iar $\cos\beta\Big|_0^{\pi} = -2$. Rezultă, $H=nI$.

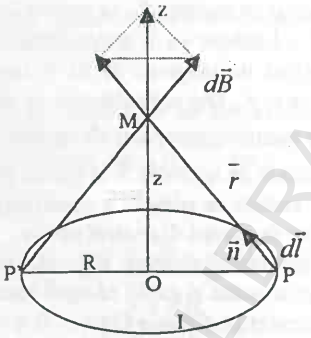
*

84. În virtutea simetriei contribuția elementelor de curent diametral opuse la câmpul magnetic generat la cota z se concretizează printr-o însumare a câmpurilor elementare $dB_{\perp}$ adică a acelor componente ale lui $d\vec{B}$ perpendiculare pe planul spirei.

Componentele $d\vec{B}_{//}$ s-ar anihila reciproc. Ca urmare, într-un plan diametral perpendicular pe planul spirei, liniile de câmp din vecinătatea conductorului circular sunt de formă aproape circulară, sensul lor fiind dat de regula burghiului. Liniile de câmp vor fi simetrice în raport cu linia de câmp axială dirijată după Oz. Inducția magnetică elementară $d\vec{B}$ produsă de curentul

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY





elementar $Id\vec{l}$ are expresia: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{n}}{r^2}$ cu modulul $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} sin\frac{\pi}{2}$.

Câmpul total în M rezultă integrând contribuţiile $dB_\perp = dB \sin\theta$ pe conturul spirei.

$$B_\perp = \oint dB_\perp = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{\sin\theta}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R}{r^2} \sin\theta$$

Cum $R = r \sin\theta$ şi $r^2 = R^2 + z^2$, rezultă $B_\perp = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$.

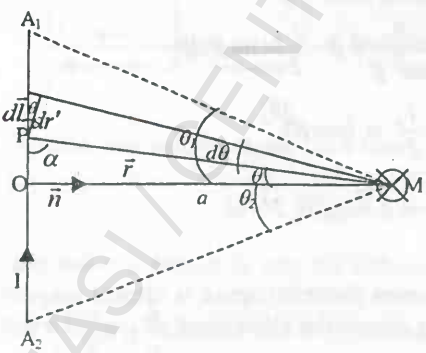
În centrul spirei ($z = 0$) şi câmpul total produs de curentul circular I prin spiră, are valoarea $B_0 = \mu_0 \frac{I}{2R}$.

*

85. Susceptibilitatea magnetică $\chi_m = \mu_r - 1 = \frac{B}{\mu_0 H} - 1$. Intensitatea de magnetizare $M = \frac{B}{\mu_0} - H$ este constantă în orice punct al barei magnetice, întrucât bara a fost presupusă *fără dispersie*. Momentul magnetic $M_{mB} = \int_V M dV = M \int_V dV = Mla^2$.

*

86. Vectorul inducţie magnetică în punctul M este perpendicular pe planul definit de conductor şi de punctul M iar sensul acestui vector rezultă prin aplicarea regulii burghiului drept , în cazul prezentat în figură, dinspre cititor spre hârtie. Elementul de curent corespunzător elementului de lungime $d\vec{l}$ va crea în M o inducţie elementară în conformitate cu legea Biot – Savart – Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \frac{d\vec{l} \times \vec{n}}{r^2}$, al cărui modul este



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\alpha$$

în timp ce $\left|d\vec{l} \times \vec{n}\right| = dl \cdot sin(\pi - \alpha) = dl \sin\alpha$ în care

$$sin\,\alpha = sin(\pi/2 - \theta) = cos\,\theta.$$

Cum $dr' = dl\cos\theta = rd$ şi $a = r\cos\theta$, obţinem:

$$dl = \frac{ad\theta}{\cos^2\theta} \text{ şi } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\cos\theta d\theta}{a}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Câmpul de inducție total se obține prin integrare $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$

În cazul particular când punctele A_1 și A_2 se deplasează către $+\infty$ și respectiv $-\infty$, unghiurile θ_1 și θ_2 tind către valorile $-\pi/2$ și respectiv $\pi/2$ și B va deveni egal cu $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$.

*

87.

a) Numărul de spire *N* rezultă din relația: $Nd = \pi D \rightarrow N = 1000$ spire

- diametrul unei spire: $d_s = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 4cm$
- lungimea firului $l = N\pi d_s = 40\pi\, m$
- rezistența firului $R = \rho l/s = 1,1\Omega$
- în sfârșit, intensitatea curentului $I = U/R = 1,12A$

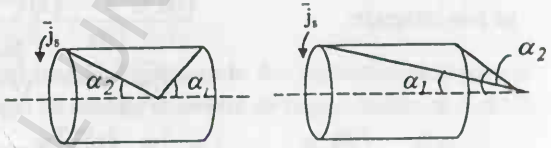
b) $L = \phi/I = 8\pi \cdot 10^{-2}\, H$

c) $L = \frac{\mu N^2 S}{l} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{2\pi r}$ rezultă $\mu_r = 500$.

d) $H = \frac{NI}{l} = \frac{NI}{2\pi r} = 1280\frac{A}{m}$

*

88. Distribuția de curenți echivalentă magnetizării este $\vec{j}_{s,m} = \vec{M}\times\vec{n}$, $\vec{j}_m = \nabla\times\vec{M}$, deci $\vec{j}_{s,m} = M\vec{l}_\theta$; $\vec{j}_m = 0$, unde $\vec{l}_\theta$ este vectorul unitate ortoradial într-un plan perpendicular pe axa cilindrului. Problema se reduce deci la calculul câmpului unui solenoid cu *n* spire pe unitatea de lungime și parcurs de un curent *I* astfel încât $nI\vec{l}_\theta = \vec{j}_s$, cu $nI = M$. De aici câmpul pe direcția axei cilindrului se scrie:



$$\vec{B}_{int} = \frac{\mu_0 \vec{M}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)}{2} \qquad \vec{B}_{ext} = \mu_0 \vec{M}\frac{|\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2|}{2}$$

și

$$\vec{H}_{int} = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} - \vec{M} = -\vec{M}\frac{2-(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)}{2} \qquad \vec{H}_{ext} = \frac{\vec{B}_{ext}}{\mu_0} = \vec{M}\frac{|\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2|}{2}$$

În centrul magnetului $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{e}{\sqrt{e^2 + 4R^2}}$.

Dacă $e \ll R$, $\vec{B}_{int} \cong 0$, $\vec{H}_{int} \cong -\vec{M}$ iar dacă $e \gg R$, $\vec{B}_{int} \cong \mu_0\vec{M}$, $\vec{H}_{int} = 0$.

*

89. Conform figurii curenții de magnetizare sunt $\vec{j}_m = \nabla\times\vec{M}$ și $\vec{j}_{ms} = \vec{M}\times\vec{n}$;

$\vec{j}_m = -\frac{M_0}{a}\vec{l}_\theta$, $\vec{j}_{ms} = M_0\vec{l}_\theta$ ceea ce este echivalent cu o suprapunere de solenoizi coaxiali. Se remarcă $\nabla\times\vec{M} = -\left[\frac{\partial M_z}{\partial r}\right]\vec{l}_\theta$ pentru o magnetizare $\vec{M} = M(r)\vec{l}_z$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

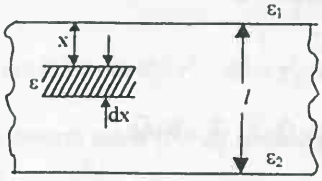
Câmpul exterior($r > a$), este nul . $\vec{B}_{ext} = 0$. Pentru o distanță $r < a$ pe baza teoremei Ampère aplicată unui contur ca cel din figură. $B \times h = \mu_0 h\left[\int_r^a -\frac{M_0}{a}dx + M_0\right] = \mu_0 h M_0 \frac{r}{a}$.

Acest câmp este coliniar cu axa Oz.Pentru $r < a, \vec{B}_{int} = \mu_0 \frac{r}{a} M_0 \vec{l}_z$.La traversarea barei câmpul $\vec{B}$ suferă o discontinuitate de valoare $\mu_0 \vec{j}_{s,in} \times \vec{l}_r$.

*

II.5 ELECTROMAGNETISM

1. Scriem legea de variație a permitivității electrice ε cu adâncimea x în lamă : $\varepsilon = \varepsilon^* e^{-kx}$ Constantele ε^* și k se determină din condițiile inițiale: $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$ și $\varepsilon(l) = \varepsilon_2$.



Rezultă , $\varepsilon^* = \varepsilon_1$ și $k = \frac{1}{2} ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ .Dacă dt este timpul necesar undei ca să străbată stratul de grosime dx cu viteza $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}$ rezultă $dt = \sqrt{\varepsilon\mu_0}dx$.

.Timpul total t necesar ca unda să străbată distanța l se obține prin integrare:

$$t = \sqrt{\mu_0}\int_0^l \sqrt{\varepsilon}dx = \sqrt{\mu_0\varepsilon^*}\int_0^l e^{-\frac{kx}{2}}dx$$

și înlocuind valoarea lui k, obținem: $t = \frac{2l\sqrt{\mu_0}}{ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\left(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}\right)$.

*

2. Notăm cu $\vec{n}_k = \frac{\vec{k}}{k}$ versorul direcției de propagare a undei. Avem:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \vec{n}_k \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} \cdot \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{k} \times \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$$

În originea axelor $\vec{r} = 0$ și $\vec{H} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{k} \times \vec{E}_0 \cos ckt$ în care $ck = \omega$, c fiind viteza de propagare a luminii în vid.

*

3. Explicităm operatorii de derivare : $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right)$ deci ,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\right)$$

Procedând analog, se obține: $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$ astfel că schimbările de variabile pro-

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

puse transformă ecuaţia undelor specificată în textul enunţului, în ecuaţia : $\frac{\partial^2 E(X,Y)}{\partial X \partial Y} = 0$.

Prin integrare, se obţine : $E = f(X) + g(Y) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$.

*

4. Simetria sferică presupune dependenţa $E(x, y, z) = E(r, \theta, \varphi) = E(r)$. Prin urmare derivatele în raport cu θ şi φ sunt nule şi ecuaţia de propagare a undelor ia forma :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial E}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t} = 0$$

Cu substuţia $\chi(r) = rE(r)$, ecuaţia devine $\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$ şi admite soluţia,

$\chi(r) = f(r - vt) + g(r + vt)$ care conduce la $E(r) = \frac{\chi(r)}{r} = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{v}\right)$.

*

5. Pentru simplificare considerăm ecuaţia de propagare unidimensională $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

pentru care căutăm o soluţie de forma $E(x,t) = f(x)\theta(t)$. Prin înlocuirea acestei soluţii în ecuaţia de propagare, se obţine: $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\theta(t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial t^2} f(x) = 0$ echivalentă, cu :

$$\frac{v^2}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\theta(t)}\frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial t^2}$$

Cum membrul stâng depinde numai de x iar membrul drept numai de t, egalitatea presupune ca fiecare membru al acestei ecuaţii să fie egal cu aceeaşi constantă pe care o notăm cu "$-\omega^2$".

Obţinem două ecuaţii diferenţiale decuplate: $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} f(x) = 0$ şi $\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \omega^2 \theta(t) = 0$.

Cu presupunerea că ω este o constantă reală, soluţiile acestor ecuaţii, sunt :

$$f(x) = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx),\ k = \frac{\omega}{v}$$

$$\theta(t) = C\exp(i\omega t) + D\exp(-i\omega t)$$

Acceptăm $C = 0$ ceea ce corespunde unei opţiuni asupra alegerii originii timpului şi $E(x,t)$ ia forma $E(x,t) = f(x)\theta(t) = C_1 e^{-i(\omega t - kx)} + C_2 e^{-i(\omega t + kx)}$.

Primul termen, descrie unda progresivă iar termenul secund, unda regresivă. Constanta ω nu poate fi complexă întrucât într-un punct fixat $E(x,t)$ ar tinde către infinit odată cu timpul sau ne-am confrunta cu o atenuare a câmpului în timp, fără o cauză fizică.

*

6.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega)\exp[-i(\omega t - kx)]d\omega\right] = \int_{-\infty}^{\infty} k^2 E_0(\omega)\exp[-i(\omega t - kx)]dx \quad \text{şi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega)e^{-i(\omega t - kx)}d\omega\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 E_0(\omega)\exp[-i(\omega t - kx)]d\omega$$

şi cum $\int_{-\infty}^{\infty}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)E_0(\omega)\exp[-i(\omega t - kx)]d\omega = 0$ se verifică ecuaţia undelor

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

7.

1°. Plecând de la definiția $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ cu $\omega = 2\pi\nu$ și $k = 2\pi / \lambda$, $v_g = -\lambda^2 \frac{d\nu}{d\lambda} = -\lambda \frac{d}{d\lambda}(\nu\lambda) + \lambda\nu$

unde $\lambda\nu = \frac{\omega}{k} = v_\varphi$. Rezultă $v_g = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda}$.

2°. $\frac{c}{n}$ se identifică cu viteza de fază; atunci tabelul devine

$\lambda(\mu m)$	0,362	0,335	0,294
v_φ	0,614 c	0,610 c	0,605 c

de unde $\frac{dv_\varphi}{d\lambda} = 0{,}009$; $c/0{,}068 = 0{,}132\ c/\mu m$ și $\lambda_0 \frac{dv_\varphi}{d\lambda} = 0{,}044\ c$.

Relația Rayleigh va da $v_g = 0{,}610\ c - 0{,}044\ c = 0{,}566\ c$ sau $v_g = \frac{c}{1{,}767}$. Identificarea numerică a mărimii v_g cu v este satisfăcătoare și în concordanță cu principiul metodei Foucault.

*

8. Folosim relațiile Maxwell $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ și $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Se obține:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} \text{ și } \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_x}{\partial x}$$

Aceste expresii conduc la egalitățile $\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\omega E_0}{c} \sin kx \cos \omega t$ și $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{E_0 k}{c} \cos kx \sin \omega t$

din care se obține $\vec{B} = \vec{B}_0 \sin kx \sin \omega t$, cu $B_0 = \frac{E_0}{c}$. Rezultă $\vec{B} \perp \vec{E}$.

*

9. Calculăm divergența câmpului, pe componente. Astfel, $\frac{\partial}{\partial x} E_x = E_{0x} \frac{\partial}{\partial x} exp\left[-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right]$.

Se obține : $\nabla \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = \left(E_{0x} k_x + E_{0y} k_y + E_{0z} k_z\right) \cdot exp\left[-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right]$ sau

$\nabla \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{k} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \vec{D} = \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$. Rezultă $\vec{E} \cdot \vec{k} = \vec{E} \cdot \vec{n}_{\vec{k}} \cdot \left|\vec{k}\right| = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_{\vec{k}} \cdot \vec{E} = 0$. Din relația între $\left|\vec{E}\right|$ și $\left|\vec{H}\right|$ deducem și perpendicularitatea vectorilor $\vec{n}_{\vec{k}}$ și $\vec{H}$.

*

10.

1. $\vec{E}$ și $\vec{B}$ depind de z și t sub forma $e^{i(k_g z - \omega t)}$. Știind că în vid $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ se obțin ecuațiile:

$$\nabla \vec{E} = 0 \ ; \qquad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + ik_g E_z = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \ ; \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \ ; \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_g E_y = i\omega B_x \qquad (3)$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$ik_g E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y \qquad (4)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \; ; \quad -ik_g B_y = -i\varepsilon_0 \mu_0 \omega E_x \qquad (6)$$

$$ik_g B_x = -i\varepsilon_0 \mu_0 \omega E_y \qquad (7)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -i\varepsilon_0 \mu_0 \omega E_z \qquad (8)$$

Ecuațiile (6) și (7) permit să se expliciteze B_x și B_y în funcție de E_x, E_y și în raport cu (3) și (4) se obțin E_y, E_x înlocuind pe B_x și B_y. Punând $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$

$$(6') \quad -ik_g B_y = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \left(i\omega B_y + \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)}{ik_g}, \quad B_y = \frac{ik^2}{\omega\left(k - k_g^2\right)} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$(7') \quad k_g B_x = -\varepsilon_0 \mu_0 \omega \frac{\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\omega B_x \right)}{+ik_g}, \quad B_x = \frac{-ik^2}{\omega\left(k^2 - k_g^2\right)} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$E_x = \frac{ik_g}{k^2 - k_g^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad ; \quad E_y = \frac{ik_g}{k^2 - k_g^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

Introducând aceste expresii în (1) se obține:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \left(k^2 - k_g^2\right) E_z = 0 \qquad (9)$$

B_y și B_x introduse în (8) verifică o ecuație de forma (9).

2. În interiorul ghidului E_z verifică o ecuație de undă în absența sarcinii și curenților.

$$\nabla^2 E_z - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - k_g^2 E_z + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_z = 0$$

Notând $k_c^2 = k^2 - k_g^2$, $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0$; $\qquad k^2 \geq k_c^2$.

3. Se presupune $E_z(x,y) = f(x)\,g(y)$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} g + f \frac{d^2 g}{dy^2} + k_c^2 fg = 0 \; ; \quad -\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} = -k_c^2 - \frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dy^2} \qquad (10)$$

Fiecare membru al egalității (10) se egalează cu o constantă (dacă constanta este pozitivă, f este o combinație de exponențiale, dacă constanta este negativă, f este o combinație de funcții trigonometrice).

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a) $\frac{d^2f}{dx^2} = -p^2 f \quad \frac{d^2g}{dy^2} = -q^2 g \qquad p^2 + q^2 = k_c^2$;

b) $f = f_0 \sin(px + \varphi)$ şi $g = g_0 \sin(qy + \psi)$deci $E_z = E_0 \sin(px + \varphi)\sin(qy + \psi)$.

c) La suprafaţa conductorului componenta tangenţială este nulă.

$$E_z = 0 \text{ la } x = 0,\ x = a;\ y = 0,\ y = b$$

$$pa = m\pi,\ qb = n\pi,\ \varphi = \psi = 0.$$

$$E_z = E_0 \sin\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y e^{i(k_g z - \omega t)}$$

d) Introducând $p = m\pi/a$, $q = n\pi/b$ în $k_c^2 = p^2 + q^2$ se obţine $k_c^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$.

4.
$$E_x = -\frac{k_g}{k_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \sin(k_g z - \omega t)$$

$$E_y = -\frac{k_g}{k_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \sin(k_g z - \omega t)$$

$$E_z = E_0 \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \cos(k_g z - \omega t)$$

$$B_x = \frac{k^2}{\omega k_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot \sin(k_g z - \omega t)$$

Condiţia $k_c^2 = k^2 - k_g^2$, impune $k^2 > k_c^2$. Dar $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

Modul (m, n) se poate propaga în condiţiile $\omega_0 = ck_c = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$.

5. Ţinând seama că $B_z = 0$, vectorul Poynting $\vec{Y} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ se scrie

$$\vec{Y} = \frac{(-E_z B_y)\vec{e}_x + (E_z B_x)\vec{e}_y + (E_x B_y - E_y B_x)\vec{e}_z}{\mu_0}$$

Având în vedere expresiile diverselor componente ale câmpurilor şi luând mediile în timp ale acestora se obţine

$$\vec{\bar{Y}} = \frac{k^2 k_g E_0^2}{2\omega k_c^4 \mu_0}\left[\frac{m^2\pi^2}{a^2}\cos^2\frac{m\pi}{a} x \sin^2\frac{n\pi}{b} y + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin^2\frac{m\pi}{a} x \cos^2\frac{n\pi}{b} y\right]\vec{e}_z$$

Energia se propagă în direcţia Oz a ghidului de undă.

*

11.

1. La suprafaţa conductorului componenta tangenţială a lui E este nulă. Se verifică pentru $z = \pm a$, $E_y = 0$; $\nabla\vec{E}$ se reduce doar la $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ care este automat nulă.

BOLIASH CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\nabla\times\vec{E}=i\omega\vec{B}$; de unde $\vec{B}$ se determină pe componente.

$$B_x=-i\frac{E_0\pi}{2a\omega}\sin\frac{\pi z}{2a}e^{i(kx-\omega t)};\ B_y=0;\ B_z=\frac{kE_0}{\omega}\cos\frac{\pi z}{2a}e^{i(kx-\omega t)}$$

Se remarcă anularea componentei normale B_z la suprafața conductoare.

Se verifică simplu că $\nabla\vec{B}=0$.

3. $\nabla\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$; ținând seama de expresiile lui $\vec{E}$ și $\vec{B}$ se obține $k^2=\dfrac{\omega}{c^2}-\left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^2$ cu

$\varepsilon_0\mu_0c^2=1$. Propagarea are loc doar pentru $\omega>\omega_0=\dfrac{\pi c}{2a}$, ω_0 fiind ***frecvența de tăiere***.

4. $v_f=\dfrac{\omega}{k}$, $v_g=\dfrac{d\omega}{dk}=\dfrac{1}{dk/d\omega}$. Se obține $v_f=\dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}}>c;\ v_g=c\sqrt{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}<c$

Se constată că $v_fv_g=c^2$; viteza de grup corespunde vitezei de propagare a energiei.

5. $\vec{Y}=\dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$; $\vec{Y}=\dfrac{1}{\mu_0}\left[\left(E_yB_z\right)\vec{e}_x-\left(E_yB_x\right)\vec{e}_z\right]$;

Dacă se consideră doar partea reală,

$$\vec{Y}=\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{kE_0^2}{\omega}\cos^2\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\cos^2(kx-\omega t)\vec{e}_x-\frac{E_0\pi}{2a\omega}\cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\sin\frac{\pi z}{2a}\cos(kx-\omega t)\sin(kx-\omega t)\vec{e}_z\right]$$

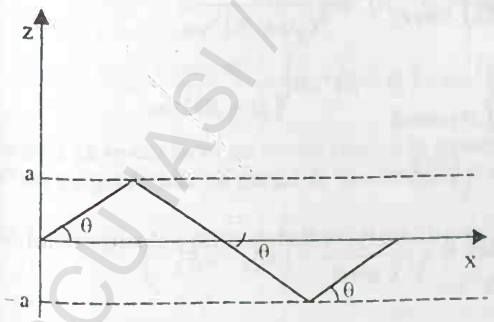
Dacă se consideră media în timp $\overline{Y}_x=\dfrac{1}{2\mu_0}\dfrac{kE_0^2}{\omega}\cos^2\left(\dfrac{\pi z}{2a}\right)$; $\overline{Y}_z=0$.

Energia se propagă după axa Ox.

6. Scriind $\cos\dfrac{\pi z}{2a}=\dfrac{e^{i\pi z/2a}+e^{-i\pi z/2a}}{2}$, E_y se poate scrie $E_y=E_{1y}+E_{2y}$ cu

$$E_{1y}=\frac{E_0}{2}e^{i\left(kx+\frac{\pi z}{2a}-\omega t\right)};\ E_{2y}=\frac{E_0}{2}e^{i\left(kx-\frac{\pi z}{2a}-\omega t\right)}$$

Această descompunere se poate aplica și câmpului $\vec{B}$.



E_{1y} și E_{2y} reprezintă unde plane de pulsație ω cu vectorii de undă

$$\vec{k}_1=k\vec{e}_x+\frac{\pi}{2a}\vec{e}_z;\ \vec{k}_2=k\vec{e}_x-\frac{\pi}{2a}\vec{e}_z$$

care fac cu axa Ox unghiurile θ și respectiv $-\theta$; $\cos\theta=\dfrac{k}{\sqrt{k^2+\dfrac{\pi^2}{4a^2}}}$.

Fotonii asociați acestei unde se pro-

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

pagă după direcțiile $\vec{k}_1$ și $\vec{k}_2$. Ei se reflectă alternativ pe planele conductoare. Pentru a avansa cu x ei trebuie să parcurgă în vid distanța $l = \frac{x}{\cos\theta}$, în timpul $t = \frac{l}{c} = \frac{x}{c\cos\theta}$, de unde viteza de propagare a energiei după axa x rezultă a fi $v_e = \frac{x}{t} = c\cos\theta = \frac{ck}{\sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{4a^2}}}$.

Ținând cont de relația $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{4a^2}$ se obține $v_e = c\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{4a^2\omega^2}} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = v_g$.

*

12. Scriem expresia vectorului Poynting $\vec{Y} = \vec{E} \times \vec{H}$ și relația între $|\vec{H}|$ și $|\vec{E}|$:

$$|\vec{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$$

Rezultă, ținând seama că $\vec{E} \perp \vec{H}$, $\vec{Y} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\frac{\vec{k}}{k}$ și întrucât

$$\overline{\cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)dt = \frac{1}{2}$$

în care T = perioada undei, se obține în definitiv, $\vec{\bar{Y}} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 c^2 E_0^2}{\omega}\vec{k}$.

*

13.

1. $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2$ pentru unda electromagnetică care cade perpendicular pe suprafața de separare. Dacă însă unda electromagnetică cade sub un unghi oarecare, $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \cos\theta$.

Deci,

$$I_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(E_0^i\right)^2 \cos\theta_i$$

$$I_r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(E_0^r\right)^2 \cos\theta_r$$

$$I_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\left(E_0^t\right)^2 \cos\theta_t$$

Din legea conservării energiei, $I_i = I_r + I_t$ sau

$$n_1\left(E_0^i\right)^2 \cos\theta_i = \left(E_0^r\right)^2 n_1 \cos\theta_i + \left(E_0^t\right)^2 n_2 \cos\theta_t$$

$$\left(E_0^i\right)^2 \cos\theta_i = \left(E_0^r\right)^2 \cos\theta_i + \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}\cos\theta_t \left(E_0^t\right)^2$$

$$\left(E_{11}^{i\,2} + E_{\perp}^{i\,2}\right)\cos\theta_i = \left(E_{11}^{r\,2} + E_{\perp}^{r\,2}\right)\cos\theta_i + \frac{\sin\theta_i \cos\theta_t}{\sin\theta_t}\left(E_{11}^{t\,2} + E_{\perp}^{t\,2}\right)$$

Putem separa componentele $E_{//}$ și $E_{\perp}$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E_{11}^{i\,2}\cos\theta_i = E_{11}^{r\,2}\cos\theta_i + \frac{\sin\theta_i\cos\theta_t}{\sin\theta_t}E_{11}^{t\,2}$$

$$E_{\perp}^{i\,2}\cos\theta_i = E_{\perp}^{r\,2}\cos\theta_i + \frac{\sin\theta_i\cos\theta_t}{\sin\theta_t}E_{\perp}^{t\,2}$$

$$\frac{tg^2(\theta_i-\theta_t)}{tg^2(\theta_i+\theta_t)}\cos\theta_i + \frac{4\sin^2\theta_t\cos^2\theta_i}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)\cos^2(\theta_i-\theta_t)}\cdot\frac{\sin\theta_i\cos\theta_t}{\sin\theta_t} = \cos\theta_i \qquad a)$$

şi

$$\frac{\sin^2(\theta_i-\theta_t)}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)}\cos\theta_i + \frac{4\sin^2\theta_t\cos^2\theta_i}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)}\cdot\frac{\sin\theta_i\cos\theta_t}{\sin\theta_t} = \cos\theta_i \qquad b)$$

$$\cos\theta_i\frac{\sin^2(\theta_i-\theta_t)}{\cos^2(\theta_i-\theta_t)}\cdot\frac{\cos^2(\theta_i+\theta_t)}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)} + \frac{4\sin^2\theta_t\cos^2\theta_i}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)\cos^2(\theta_i-\theta_t)}\cdot\frac{\sin\theta_i\cos\theta_t}{\sin\theta_t} =$$

$$= \frac{\cos\theta_i}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)\cos^2(\theta_i-\theta_t)}\left[\sin^2(\theta_i-\theta_t)\cos^2(\theta_i+\theta_t) + 4\sin\theta_t\cos\theta_i\sin\theta_i\cos\theta_t\right] \qquad c)$$

$$\sin\theta_i\cos\theta_t = \frac{\sin(\theta_i+\theta_t)+\sin(\theta_i-\theta_t)}{2}$$

$$\sin\theta_t\cos\theta_i = \frac{\sin(\theta_i+\theta_t)-\sin(\theta_i-\theta_t)}{2}$$

Deci

$$\sin\theta_t\cos\theta_i\sin\theta_i\cos\theta_t = \frac{1}{4}\left[\sin^2(\theta_i+\theta_t)-\sin^2(\theta_i-\theta_t)\right] \qquad d)$$

Din paranteza din c)

$$\sin^2(\theta_i-\theta_t)\cos^2(\theta_i+\theta_t) + 4\sin\theta_t\cos\theta_i sn\theta_i\cos\theta_t =$$
$$= \sin^2(\theta_i-\theta_t)\cos^2(\theta_i+\theta_t) + \sin^2(\theta_i+\theta_t) - \sin^2(\theta_i-\theta_t) =$$
$$= \sin^2(\theta_i-\theta_t)\left[\cos^2(\theta_i+\theta_t)-1\right] + \sin^2(\theta_i+\theta_t) =$$
$$= -\sin^2(\theta_i-\theta_t)\sin^2(\theta_i+\theta_t) + \sin^2(\theta_i+\theta_t) =$$
$$= \sin^2(\theta_i+\theta_t)\left[1-\sin^2(\theta_i-\theta_t)\right] = \sin^2(\theta_i+\theta_t)\cos^2(\theta_i-\theta_t)$$

Înlocuind, obținem că relația c) conduce la cos θ_i și rezultă, a).

Demonstrăm relația b):

$$\frac{\cos\theta_i}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}\left[\sin^2(\theta_i-\theta_t)+4\sin\theta_t\cos\theta_i\sin\theta_i\cos\theta_t\right] =$$

$$= \frac{\cos\theta_i}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)}\left[\sin^2(\theta_i-\theta_t)+\sin^2(\theta_i+\theta_t)-\sin^2(\theta_i-\theta_t)\right] = \cos\theta_i \text{ din d).}$$

Se arată că se conservă nu numai energia în general, ci și energia undelor cu vectorul $\vec{E}$ paralel sau perpendicular pe planul de incidență.

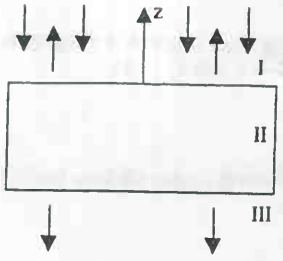
*

14. Intensitatea E a câmpului electric rezultă prin rezolvarea ecuației:

$$\frac{d^2E}{dx^2} + k^2E = 0,$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$k = \frac{c}{n}$ în interiorul plăcii şi $k = k_0 = \frac{\omega}{c}$ în afara plăcii.Am considerat ca axă Oz direcţia normalei la suprafaţa plăcii.



Această ecuaţie admite soluţiile:

$$E_I = E_0 e^{ik_0 x} + Ae^{-ik_0 x} \quad \text{(în mediul I)}$$

$$E_{II} = E_+ e^{ikx} + E_- e^{ikx} \quad \text{(în mediul II)}$$

$$E_{III} = De^{ik_0 x} \quad \text{(în mediul III)}$$

În aceste relaţii, E_0 este amplitudinea undei incidente, A amplitudinea undei reflectate iar D amplitudinea undei transmise. Impunem condiţia de continuitate a câmpului la limitele de separaţie a mediilor şi obţinem sistemul:

$$E_0 + A = E_+ + E_-$$

$$E_+ e^{ikd} + E_- e^{-ikd} = De^{ik_0 d}$$

$$E_0 - A = nE_+ - nE_-$$

$$nE_+ e^{ikd} - nE_- e^{-ikd} = De^{ik_0 d}$$

Introducem notaţiile $\rho_0 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2$ şi $\delta_0 = \frac{An}{(1+n)^2}$ pentru *reflectanţă* si *transmitanţă* şi rezolvăm sistemul.

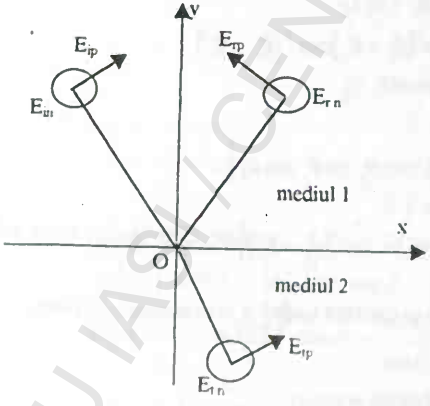
Rezultă: $\frac{A}{E_+} = \frac{\sqrt{\rho_0}\left(1-e^{2ikd}\right)}{1-\rho_0 e^{2ikd}}; \frac{E_+}{E_0} = \frac{2}{(1+n)\left(1-\rho_0 e^{2ikd}\right)}; \frac{E_-}{E_0} = \frac{2\rho_0}{(n-1)\left(e^{-2ikd}-\rho_0\right)}; \frac{D}{E_0} = \frac{\delta_0 e^{ikd}}{1-\rho_0 e^{2ikd}}$

din care pentru reflectanţa undei pe placăextragem expresia: $\rho = \frac{|A|^2}{|E_0|^2} = \frac{4\rho_0 \sin^2 kd}{\delta_0^2 + 4\rho_0 \sin^2 kd}$

Se obţine reflectanţă nulă pentru grosimi $d_m = \frac{\pi m}{k} = \frac{m\lambda}{2}$; $m=0,1,2,3,...$ în care λ este lungimea de undă a undei electromagnetice în interiorul plăcii.

*

15. Notăm cu $\vec{E}_i, \vec{E}_r, \vec{E}_t$ intensităţile câmpurilor electrice incident, reflectat şi transmis.



Vom considera componentele acestor vectori pe două direcţii: una paralelă cu planul de incidenţă şi una normală pe acesta.

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{ip} + \vec{E}_{in}$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{rp} + \vec{E}_{rn}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{tp} + \vec{E}_{tn}$$

Scriem condiţiile de continuitate la limita de separaţie a celor două medii pentru câmpul electric

$$\begin{cases} E_{ip}\cos\alpha_i + E_{rp}\cos\alpha_i = E_{tp}\cos\alpha_t \\ E_{in} + E_{rn} = E_{tn} \end{cases},$$

iar pentru câmpul magnetic ţinem seama de relaţia $\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\vec{n} \times \vec{E}$ şi că $\mu_1 = \mu_2$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Obținem :

$$\sqrt{\varepsilon_1}\left(E_{in}\cos\alpha_i - E_{rn}\cos\alpha_i\right) = \sqrt{\varepsilon_2}E_{tn}\cos\alpha_t$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\left(E_{ip} - E_{rp}\right) = \sqrt{\varepsilon_2}E_{tn}$$

din care, rezultă :

$$E_{in} + E_{rn} = E_{tn}$$

$$E_{in} - E_{rn} = E_{tn}\frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_i}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = E_{tn}\frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_i}\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_t}$$

sau, prin rezolvarea sistemului:

$$\frac{E_{tn}}{E_{in}} = \frac{2\cos\alpha_i\sin\alpha_t}{\sin(\alpha_i+\alpha_t)} = t_n$$

$$\frac{E_{rn}}{E_{in}} = \frac{\sin(\alpha_i-\alpha_t)}{\sin(\alpha_i+\alpha_t)} = r_n$$

și printr-un procedeu analog obținem pentru componentele paralele cu planul de incidență:

$$E_{ip} + E_{rp} = E_{tp}\frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_i} \quad \text{și} \quad E_{ip} - E_{rp} = E_{tp}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = E_{tp}\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_t}$$

care conduc la valorile :

$$t_p = \frac{E_{tp}}{E_{ip}} = \frac{2\sin\alpha_t\cos\alpha_t}{\cos(\alpha_i-\alpha_t)\sin(\alpha_i+\alpha_t)}; \quad r_p = \frac{E_{rp}}{E_{ip}} = -\frac{tg(\alpha_i-\alpha_t)}{tg(\alpha_i+\alpha_t)}$$

La incidență normală, $\alpha_i = \alpha_t = 0$ și relațiile anterioare, se scriu :

$$t_p = \frac{2n_1}{n_1+n_2} = t_n \qquad \text{și} \qquad r_p = -\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1} = r_n .$$

*

16. $E(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega)\exp[i(\omega t - kx)]d\omega = E_0\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}}\exp[i(\omega t - kx)]d\omega$

și prin înlocuirea valorii aproximative a vectorului de undă sub integrală, obținem:

$$E(x,t) = E_0\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}}\exp i\left(\omega t - k_0 x - (\omega-\omega_0)\frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega_0}x\right)d\omega =$$

$$= E_0\exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]\int_{\omega-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}}\exp\left[i(\omega-\omega_0)\left(t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}x\right)\right]d\omega =$$

$$= E_0\exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]\Delta\omega\cdot\frac{\sin\left[t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}\cdot x\right]\frac{\Delta\omega}{2}}{\left[t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}\cdot x\right]\frac{\Delta\omega}{2}}$$

Această expresie reprezintă o undă cu pulsația ω_0 cu vectorul de undă k_0, a cărei amplitudine complexă $E_0\exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]$ este modulată de factorul $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ în care $\alpha = \left(t-\frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega_0}x\right)\frac{\Delta\omega}{2}$.

*

17. Maximul amplitudinii pachetului de unde se obține pentru $\alpha = 0$ când $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

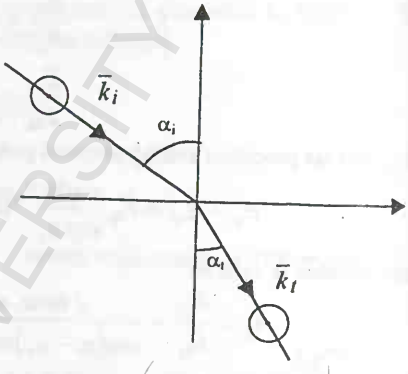
Impunând condiția $\alpha = 0$, obținem $x = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)\cdot t$, ecuație ce descrie mișcarea uniformă a maximului cu viteza:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\left(2\pi\frac{\nu}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)} = -\lambda^2\frac{d\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)}{d\lambda} = \nu - \lambda\frac{d\nu}{d\lambda}.$$

*

18. Scriem legea refracției pentru unghiul limită

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin\alpha_l = \frac{1}{1{,}5} \Rightarrow \alpha_l = 41{,}8$$



Pentru $\alpha_i > \alpha_l$ ecuația $\sin\alpha_i = \frac{1}{n}\sin\alpha_t$ nu admite soluții reale deoarece pentru $\sin\alpha_i > \sin\alpha_t = \frac{1}{n}$ s-ar obține $\sin\alpha_t > 1$. Unda transmisă are expresia :

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0}\exp\left[-i\left(\omega t - \vec{k}_t\vec{r}\right)\right]$$

$$k_{tx} = k\sin\alpha_t = \frac{\omega}{c}n\sin\alpha_i$$

$$k_{ty} = k\cos\alpha_t = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\sin^2\alpha_t} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha_i}$$

Pentru incidențe $\alpha_i > \alpha_l$ ($\sin\alpha_i > \frac{1}{n}$), componenta k_{ty} devine imaginară și are expresia

$$k_{ty} = \pm i\frac{\omega}{c}\sqrt{n^2\sin^2\alpha_i - 1} = \pm\frac{i\omega}{c}\xi$$

Rezultă că unda transmisă are forma :

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0}\exp\left[\pm\xi y\right]\exp\left[-i\left(\omega t - k_{tx}x\right)\right]$$

Semnul "+" nu asigură o comportare asimptotică corectă întrucât câmpul ar avea la infinit valori infinit de mari așa încât vom reține ca fizic semnificativ factorul $exp(-\xi y)$ care va scoate în evidență o undă ce se propagă în sensul axei Ox și a cărei amplitudine scade exponențial pe direcția Oy.

*

13. Plan de separare: xoy: $E \to E_x ; H \to H_y$

- Pentru unda incidentă : $\begin{cases} E_x = E_{10}^{(0)}e^{i(\omega t - k_{10}z)} \\ E_y = E_z = 0 \end{cases}$ și $\begin{cases} H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{10}^{(0)}e^{i(\omega t - k_{10}z)} \\ H_x = H_z = 0 \end{cases}$

$$E_x = E_{12}^{(0)}e^{i(\omega t - k_{12}z)}, E_y = 0, E_z = 0$$

- Pentru cea refractată ,

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_{12}^{(0)}e^{i(\omega t - k_{12}z)}, H_x = 0, H_z = 0$$

- Pentru unda reflectată trebuie avut în vedere că:
  - se propagă în sens opus axei z ;

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- $\vec{E},\vec{H},\vec{k}$ formează triedru drept în această ordine – sensul $\vec{k}$ de propagare se modifică dacă unul din vectorii $\vec{E},\vec{H}$ se modifică. Deci :

$$E_x = E_{11}^{(0)} e^{i(\omega t + k_{11} z)}, E_y = E_z = 0$$

$$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{11}^{(0)} e^{i(\omega t + k_{11} z)}, H_x = H_z = 0$$

Condițiile la limită presupun $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ și setul de relații:

$$E_{10}^{(0)} + E_{11}^{(0)} = E_{12}^{(0)}$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} E_{10}^{(0)} - \sqrt{\varepsilon_1} E_{11}^{(0)} = \sqrt{\varepsilon_2} E_{12}^{(0)}$$

$$n_{12} = \sqrt{\varepsilon_2} \Big/ \sqrt{\varepsilon_1}$$

$$E_{10}^{(0)} + E_{11}^{(0)} = E_{12}^{(0)} \Rightarrow E_{12}^{(0)} = \frac{2}{1+n_{12}} E_{10}^{(0)}$$

$$E_{10}^{(0)} - E_{11}^{(0)} = n_{12} E_{12}^{(0)} \Rightarrow E_{11}^{(0)} = \frac{1-n_{12}}{1+n_{12}} E_{10}^{(0)}$$

Intensitatea undei : $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2$ astfel,că

- Intensitatea undei incidente : $I_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \left(E_{10}^{(0)}\right)^2$
- Intensitatea undei reflectate

$$I_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \left(E_{11}^{(0)}\right)^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \left(E_{10}^{(0)}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-n_{12}}{1+n_{12}}\right)^2 = I_{10}\left(\frac{1-n_{12}}{1+n_{12}}\right)^2$$

- Intensitatea undei refractate :

$$I_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} \left(E_{12}^{(0)}\right)^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} \left(E_{10}^{(0)}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{1+n_{12}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \left(E_{10}^{(0)}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \left(\left(\frac{2}{1+n_{12}}\right)^2\right) = I_{10} \frac{4n_{12}}{(1+n_{12})^2}$$

- Coeficientul de reflexie : $R = \frac{I_{11}}{I_{10}} = \left(\frac{1-n_{12}}{1+n_{12}}\right)^2$
- Coeficientul de transmisie : $T = \frac{I_{12}}{I_{10}} = \left(\frac{4n_{12}}{1+n_{12}}\right)^2$

$$I_{12} + I_{11} = I_{10}\left[\frac{(1-n_{12})^2 + 4n_{12}}{(1+n_{12})^2}\right] = I_{10}$$

Ultima relație evidențiază conservarea energiei la suprafața de separare a mediilor.

*

20. Considerăm două unde electromagnetice

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos \omega t$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\omega t + \varphi)$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin suprapunerea acestor două unde se va obține o undă rezultantă descrisă de amplitudinea :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{01}\cos\omega t + \vec{E}_{02}\cos(\omega t + \varphi).$$

Intensitatea momentană a acestei unde, va fi

$$I \approx \overline{E^2} = E_{01}^2\cos\omega t + E_{02}^2\cos^2(\omega t + \varphi) + 2\vec{E}_{01}\vec{E}_{02}\cos\omega t\cos(\omega t + \varphi)$$

iar intensitatea medie a undei rezultante

$$\bar{I} \approx \frac{1}{T}\int_0^T E^2 dt = E_{01}^2 \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t dt + E_{02}^2 \cdot \frac{1}{T}\int \cos^2(\omega t + \varphi)dt +$$

$$+\frac{2\vec{E}_{01}\vec{E}_{02}}{T}\int_0^T \cos\omega t\cos(\omega t + \varphi)dt$$

și întrucât $\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{1}{2}$ se obține :

$$\bar{I} \approx \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2\frac{2}{T}\vec{E}_{01}\vec{E}_{02}\int_0^T \cos\omega t\cos(\omega t + \varphi)dt$$

unde $I_1 \approx E_{01}^2$ și $I_2 \approx E_{02}^2$.

Pentru a obține interferența este necesar ca $\bar{I} = \frac{I_1 + I_2}{2}$ = constant indiferent de diferența de fază φ, ceea ce echivalează cu condiția $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = 0$ adică ,ar trebui ca cele două unde polarizate liniar care se suprapun să aibă planele de polarizare reciproc perpendiculare.

*

21.

1. Condițiile de trecere la planul de separare sunt de forma

$$E_{1x}e^{j(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + E_{2x}e^{j(\vec{k}'\vec{r}-\omega t)} = E_{3x}e^{j(\vec{k}''\vec{r}-\omega t)}$$

Această identitate este operantă în orice plan, ceea ce impune unele relații între vectorii de undă $\vec{k}$, $\vec{k}'$, $\vec{k}''$. Aceste relații conduc la legile lui Descartes.

Condițiile generale sunt $B_1 = B_2$, $E_{t_1} = E_{t_2}$, $B_1E_{n_1} = B_2E_{n_2}$, unde E_t și E_n sunt componentele tangențiale și normale ale vectorului câmp electric.

2. În cazul în care $\vec{E}$ este polarizată perpendicular pe planul de incidență E_n=0; ținând seama de structura unei unde EM plane progresive

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega \times \vec{E}} = \frac{n}{c}\vec{u} \times \vec{E} \text{ cu } n = \sqrt{\varepsilon_r} \text{ și } \vec{u} = \frac{\vec{k}}{\|k\|}$$

Condițiile de trecere se vor scrie pentru $z=0$: $E_i + E_r = E_t$, $B_i\cos i_1 - B_r\cos i_1' = B_t\cos i_2$ și $B_i\sin i_1 + B_r\sin i_2 = B_t\sin i_2$ .Aceste relații trebuie să fie verificate pentru orice abscisă y ; se obțin relațiile Descartes: $i_1' = i_1$; $n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2$ .De asemenea, știind că $B = \frac{nE}{c}$, relațiile de mai sus devin:

a) $E_i + E_r = E_t$

b) $n_1\cos i_1(E_i - E_r) = n_2\cos i_2E_t$

c) $n_1(E_i + E_r)\sin i_1 = n_2E_t\sin i_2$;

dacă se ține seama de relația (a), relația (c) conduce la $n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2$,

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b).Se rezolvă sistemul (a, b) în funcție de E_i.

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \text{ și } \left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\perp = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}$$

c).În mediul dielectric dat vectorul Poynting se scrie : $\vec{Y} = \frac{(\vec{E} \times \vec{B})}{\mu_0} = \frac{n}{\mu_0 c} E^2 \vec{u}$.

Se scriu rapoartele amplitudinilor având în vedere relațiile

$$\left(\frac{Y_r}{Y_i}\right)_\perp = \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^2_\perp \text{ și } \left(\frac{Y_t}{Y_i}\right)_\perp = \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{E_t}{E_i}\right)^2_\perp .$$

Puterea transportată de unda EM plană corespunde fluxului vectorului Poynting.
Fie un element de suprafață A în planul $z=0$. Puterile traversate prin A sunt:

$$P_I = Y_i A \cos i_1,\ P_r = Y_r A \cos i_1',\ P_t = Y_t A \cos i_2$$

de unde rezultă coeficienții de reflexie și de transmisie

$$r_\perp = \left(\frac{P_r}{P_i}\right)_\perp = \left(\frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}\right)_\perp \text{ și } t_\perp = \left(\frac{P_t}{P_i}\right)_\perp = \frac{4n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2}{(n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2)^2}.$$

Se remarcă relația $r_\perp + t_\perp = 1$, ceea ce corespunde conservării energiei.

d). Se refac calculele în cazul câmpului electric $\vec{E}$, presupus polarizat liniar, care se află în planul de incidență. Ținând cont de faptul că $\varepsilon = n^2 \varepsilon_0$, condițiile de trecere se scriu

$$B_i + B_r = B_t;\ E_i \cos i_1 - E_r \cos i_1' = E_t \cos i_2$$

$$n_1^2 (E_i \sin i_1 + E_r \sin i_1') = n_2^2 (E_t \sin i_2).$$

Știind că $B = \frac{nE}{c}$ și $i_1 = i_1'$, iar $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ se obține

$$n_1 (E_i + E_r) = n_2 E_t;\ (E_i - E_r) \cos i_1 = E_t \cos i_2$$

$$n_1^2 (E_i + E_r) \sin i_1 = n_2^2 E_t \sin i_2$$

Primele două ecuații ale sistemului permit soluția

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{||} = \frac{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \quad ; \quad \left(\frac{E_t}{E_i}\right)_{||} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}$$

ceea ce conduce la

$$r_{||} = \left(\frac{P_r}{P_i}\right)_{||} = \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^2_{||} \text{ și } t_{||} = \left(\frac{P_t}{P_i}\right)_{||} = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} \left(\frac{E_t}{E_i}\right)^2_{||}$$

sau explicit $r_{||} = \left(\frac{P_r}{P_i}\right)_{||} = \left(\frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}\right)^2$ și $t_{||} = \left(\frac{P_t}{P_i}\right)_{||} = \frac{4n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2}{(n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)^2}$.

Și în acest caz $r_{||} + t_{||} = 1$ ceea ce exprimă conservarea energiei. Se observă că $r_{||}$ și $r_\perp$ nu sunt identice; lumina naturală nu este polarizată liniar și comportă deci componente $E_{||}$ și $E_\perp$ care nu se reflectă identic, ceea ce explică polarizarea prin reflexie.

BCU IAȘI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

În particular, se verifică anularea $r_{\parallel} = 0$ dacă $i_1 = i_B = arctg\dfrac{n_1}{n_2}$, ceea ce definește incidența Brewster; lumina reflectată corespunzător este polarizată rectiliniu într-o direcție perpendiculară pe planul de incidență.

*

22.

a) $E_y^2 + E_z^2 = A^2$, undă circular polarizată ;

b) $E_y = -E_z$, undă liniar polarizată ;

c) $E_z = A\cos\left[\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right) - \dfrac{3\pi}{4}\right] = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[A\cos\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right) + A\sin\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)\right]$

din care rezultă $\left(E_z - \dfrac{\sqrt{2}}{2}E_y\right)^2 + \left(E_y\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$,deci unda este eliptic polarizată.

*

23.

1 a) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left[\vec{i}(A_1 + A_2) + \vec{j}(B_1 + B_2)\right]\cos 2\pi\nu t$

Din această ecuație, deducem că direcția vectorului rezultant $\vec{E}$ nu depinde de timp și este orientată în raport cu axa Ox la unghiul θ definit de $tg\theta = \dfrac{B_1 + B_2}{A_1 + A_2}$.

1 b) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2E_0\left(\vec{i}\cos\dfrac{\alpha}{2} + \vec{j}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\omega t + \dfrac{\alpha}{2}\right)$

ecuație care arată că direcția undei rezultante nu depinde de timp fiind astfel liniar polarizată.

2) Ecuația propusă se mai poate scrie :

$\vec{E} = \vec{i}A\sin\omega t + \vec{j}A\cos\omega t + \vec{j}(B - A)\cos 2\omega t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ în care, $\vec{E}_1 = \vec{i}A\sin\omega t + \vec{j}A\cos\omega t$ expresie ce caracterizează o undă polarizată circular și $\vec{E}_2 \equiv \vec{j}(B - A)\cos 2\omega t$, expresie ce descrie o undă polarizată liniar.

*

24. Componentele vectorului $\vec{E}$ paralelă, respectiv perpendiculară pe planul de incidență, vor fi $E_{ip} = E\cos 30^0$ și $E_{in} = E\sin 30^0$ Pentru componentele reflectate se obțin expresiile :

$$E_{rp} = \frac{tg(\alpha_i - \alpha_r)}{tg(\alpha_i + \alpha_r)}E_{ip} \text{ și } E_{rn} = \frac{\sin(\alpha_i - \alpha_r)}{\sin(\alpha_i + \alpha_r)}E_{in}$$

În plus, $\sin\alpha_i = n\sin\alpha_r$. Considerând intensitatea I_0 a radiației incidente :

$$I_0 = kE_0^2 = k\left(E_{0p}^2 + E_{0n}^2\right)$$

k fiind o constantă de proporționalitate cunoscută de altfel. Se obține pentru procentul η cerut,

$$\eta = \frac{\left[\dfrac{tg(\alpha_i - \alpha_r)}{tg(\alpha_i + \alpha_r)}\right]^2 E_{ip}^2 + \left[\dfrac{\sin(\alpha_i - \alpha_r)}{\sin(\alpha_i + \alpha_r)}\right]^2 E_{in}^2}{E_{0p}^2 + E_{0n}^2} =$$

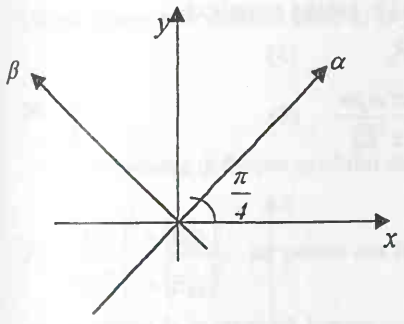
$$= \left[\frac{tg(\alpha_i - \alpha_r)}{tg(\alpha_i + \alpha_r)}\right]^2 \cos^2 30^0 + \left[\frac{\sin(\alpha_i - \alpha_r)}{\sin(\alpha_i + \alpha_r)}\right]^2 \sin^2 30^0$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi cum $\alpha_r = arcsin\left(\frac{\sin\alpha_i}{n}\right) = arcsin\frac{\sin 60^0}{1{,}5} = 35{,}2^0$, rezultă $\eta = 4\ \%$.

*

25. Faţă de un sistem de coordonate ale cărui axe α , β coincid cu axele elipsei, oscilaţia eliptică este descrisă de ecuaţiile: $E_x = E_1 \cos\omega t$; $E_y = E_2 \sin\omega t$.



Într-un sistem de axe rotite cu $\frac{\pi}{4}$ faţă de axele elipsei oscilaţia e descrisă de:

$$E_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1\cos\omega t + E_2\sin\omega t) = \frac{\sqrt{E_1^2+E_2^2}}{\sqrt{2}}\cos(\omega t-\varphi)$$

$$E_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-E_1\cos\omega t + E_2\sin\omega t) = \frac{\sqrt{E_1^2+E_2^2}}{\sqrt{2}}\cos[\omega t-(\pi-\varphi)],$$

cu $tg\,\varphi = \frac{E_2}{E_1}$ .Oscilaţiile de-a lungul axelor α şi β se efectuează cu aceeaşi amplitudine şi cu o diferenţă de faza $\Phi = \pi - 2\alpha$ .Introducem o lamă cristalină în aşa fel încât axele ei principale să coincidă cu axele α şi β şi să introducă o diferenţă de fază de $\pm\frac{\pi}{2}$.

$$(\omega t-\varphi-k_\alpha\cdot L)-(\omega t-\pi+\varphi-k_\beta\cdot L)=\pm\frac{\pi}{2}$$

de unde

$$L=\frac{2\varphi-\pi\pm\left(\pi/2\right)}{k_\beta-k_\alpha}=\lambda\frac{\left(\varphi/\pi\right)-\left(1/2\right)\pm\left(1/4\right)}{n_\beta-n_\alpha}$$

Semnul + corespunde aceluiaşi sens de rotaţie pe cerc şi elipsă, iar semnul –sensurilor opuse.

*

26.

$$\frac{1-P_r}{1+P_r}=\frac{\sum E_{rk\perp}^2}{\sum E_{rk11}^2}=\frac{\sum\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}E_{ik\perp}^2}{\sum\frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)}E_{ik11}^2}=\frac{\cos^2(i-r)}{\cos^2(i+r)}\cdot\frac{\sum E_{ik\perp}^2}{\sum E_{ik11}^2}=\frac{\cos^2(i-r)}{\cos^2(i+r)}\cdot\frac{1-P_i}{1+P_i}.$$

$$\frac{1-P_t}{1+P_t}=\frac{\sum E_{tk\perp}^2}{\sum E_{tk11}^2}=\frac{\sum\frac{4\cos^2 i\sin^2 r}{\sin^2(i+r)}E_{ik\perp}^2}{\sum\frac{4\cos^2 i\sin^2 r}{\sin^2(i+r)\cos^2(i-r)}E_{ik11}^2}=\cos^2(i-r)\frac{1-P_i}{1+P_i}$$

Dar, $\cos(i-r) \le 1$ si $\frac{\cos(i-r)}{\cos(i+r)} \ge 1$ şi deci, $P_r \le P_i \le P_t$.

*

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

27.

1). Prin definiție $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega)\vec{E}$. În absența distribuțiilor de sarcină electrică și curenți liberi, ecuațiile Maxwell se scriu:

$$\nabla\vec{E} = 0,\ \nabla\vec{B} = 0,\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t},\ \nabla\times\vec{B} = \varepsilon(\omega)\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

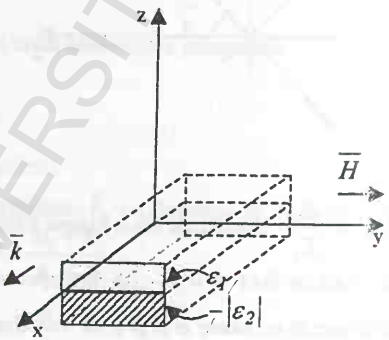
2). Pentru unda EM monocromatică plană progresivă în notație complexă

$$\vec{k}\vec{E}_0 = 0 \quad (1) \qquad \vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0 \quad (3)$$

$$\vec{k}\vec{B}_0 = 0 \quad (2) \qquad \vec{k}\times\vec{B}_0 = -\frac{\varepsilon(\omega)\omega}{c^2\vec{E}_0} \quad (4)$$

Din relația (3) rezultă $\vec{B}_0 = \frac{k}{\omega}\times\vec{E}_0$ și ținând seama de relația (1) apoi înlocuind în (4), rezultă încă $B_0^2 = \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2E_0^2}$ și relația de dispersie

$$k^2 = \frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{c^2}.$$



3). Alegând axa Oz ca direcție de propagare, faza are expresia $\Phi = kz - \omega t$. Dacă $\varepsilon(\omega)$ este real și vectorul $\vec{k}$ va avea același caracter:

$v_\varphi = \frac{z}{t} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}$ Fie $v_\varphi = \frac{c}{n}$ cu $n = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$; deci $k = \frac{n\omega}{c}$.

4).O mărime k complexă corespunde unui mediu absorbant. De fapt, dacă vectorul $\vec{k}$ are modulul $k = k' + jk''$, rezultă $E = E_0 e^{-k''z} e^{j(k'z-\omega t)}$; amplitudinea vectorului electric se amortizează în direcția Oz.

Fie $\vec{u} = \frac{\vec{k}}{\|k\|}$, deci $\vec{B} = \frac{n}{c}\vec{u}\times\vec{E}$; în cazul prezentat $\vec{u} = \vec{e}_z$, iar $\vec{B}$ are componentele

$$\vec{B} = \left(0, \frac{nE_0}{c}e^{j(kz-\omega t)}, 0\right).$$

*

28. Presupunem că unda se propagă în sensul axei Ox, câmpul magnetic $\vec{H}$ al undei este dirijat în sensul axei Oy iar planul xOy este planul de separație al celor doi dielectrici : cel cu permitivitatea ε_1 plasat în zona $z > 0$ și celălalt cu permitivitatea $-|\varepsilon_2|$ plasat în zona $z < 0$.

Ecuația $\Delta H_y + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon H_y = 0$ descrie unda transmisă și admite soluțiile

- pentru $z > 0$, $H_{1y} = H_{01}e^{ikx-\chi_1 z}$ cu $\chi_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_1}{c^2}}$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

♦ pentru $z < 0, H_{2y} = H_{02} e^{ikx - \chi_2 z}$ cu $\chi_2 = \sqrt{k^2 + \omega^2 \frac{|\varepsilon_2|}{c^2}}$

Impunem condițiile la limită $H_{1y}=H_{2y}$ și $E_{1x} = E_{2x}$ pentru $z = 0$ și obținem :

$$H_{01} = H_{02} \quad \text{și} \quad \frac{\chi_1}{\varepsilon_1} = \frac{\chi_2}{|\varepsilon_2|}$$

Ultima relație este valabilă când $\varepsilon_1 \langle |\varepsilon_2|$ și conduce la relația $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_1 |\varepsilon_2|}{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1}}$.

*

29.

1).În virtutea definiției gradului de polarizare $P = \frac{I_{II} - I_\perp}{I_{II} + I_\perp}$ pentru lumina reflectată $P_r = \frac{\left(E_{02}^{II}\right)^2 - \left(E_{02}^{\perp}\right)^2}{\left(E_{02}^{II}\right)^2 + \left(E_{02}^{\perp}\right)^2}$, iar pentru cea transmisă $P_t = \frac{\left(E_{03}^{II}\right)^2 - \left(E_{03}^{\perp}\right)^2}{\left(E_{03}^{II}\right)^2 + \left(E_{03}^{\perp}\right)^2}$ și folosind relațiile Fresnel, se obține în ipoteza că lumina incidentă este naturală, $\left(E_{01}^{II} = E_{01}^{\perp}\right), P_r = 0$, iar pentru P_t rezultă relația $P_t = \frac{1 - \frac{4n^2}{\left(1+n^2\right)^2}}{1 + \frac{4n^2}{\left(1+n^2\right)^2}} = 4{,}16\%$.

2).În cazul incidenței normale, din relațiile Fresnel, deducem

$$E_{02}^{II} = E_{01}^{II} \cdot \frac{n-1}{n+1}; \quad E_{02}^{\perp} = E_{01}^{\perp} \cdot \frac{n-1}{n+1}$$

$$E_{03}^{II} = E_{01}^{II} \cdot \frac{2}{n+1}; \quad E_{03}^{\perp} = E_{01}^{\perp} \cdot \frac{2}{n+1}$$

și ținând seama că lumina incidentă este naturală, se obține: $P_r = P_t = 0 \quad \left(E_{01}^{II} = E_{01}^{\perp}\right)$, adică undele reflectată și transmisă sunt nepolarizate.

*

30.

1) Lumina reflectată este liniar polarizată la incidența brewsteriană : $tg\ i_B = n$. Rezultă $i_B = arctg\ 1{,}5 = 56°15'$.

2) Formulele lui Fresnel conduc la expresia $R_{11} = \frac{tg(i-r)}{tg(i+r)}$ și punând $R_{II} = 0$ rezultă ecuația $tg^2 i \cdot tgr - tgi\left(tg^2 r + 1\right) + tgr = 0$ cu soluțiile: $tgi_1 = ctg\ r$ și $tgi_2 = tg\ r$. Ultima relație poate fi experimental, întâmplătoare. Rămâne $tgi = ctg\ r$ cu soluția $tgi = n$ dacă avem în vedere că $sin\ i = n\ sin\ r$.

*

31. Notăm cu E_n și E_P componentele normală respectiv paralelă cu planul de incidență ale câmpului electric. Trecerea prin sticlă este marcată de coeficienții de transmisie t_n și respectiv t_P. Astfel prin parcurgerea lamei notată cu i se obține pentru câmpul emergent spre lama $i + 1$,

$$E_{i+1} = t \cdot E_i$$

$$E_{n,i+1} = t_n \cdot E_i$$

$$E_{p,i+1} = t_p \cdot E_i$$

BCU MASU CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

în care $t_n = \frac{2\cos\alpha_i \sin\alpha_t}{\sin(\alpha_i + \alpha_t)}$ şi $t_p = \frac{2\cos\alpha_i \sin\alpha_t}{\sin(\alpha_i + \alpha_t)\cos(\alpha_i - \alpha_t)}$.

La incidenţa brewsteriană $\alpha_i + \alpha_t = \frac{\pi}{2}$ astfel că $t_n = 2\cos^2\alpha_i$ şi $t_p = \frac{2\cos^2\alpha_i}{\sin 2\alpha_i} = ctg\alpha_i$.

Pe de altă parte, în acest caz $tg\alpha_i = n$ şi se obţine $t_n = \frac{2}{1+n^2}$ şi $t_p = \frac{1}{n}$.

Rezultă, după cele cinci treceri prin lame,

$$E_{n5} = t_n^5 E_{n0}$$

$$E_{p5} = t_p^5 E_{p0}$$

Se obţine astfel pentru gradul de polarizare a luminii :

$$P = \frac{1-\left(\frac{E_n}{E_p}\right)^2}{1+\left(\frac{E_n}{E_p}\right)^2} = \frac{1-\left(\frac{t_n}{t_p}\right)^5 \cdot \left(\frac{E_{n0}}{E_{p0}}\right)^2}{1+\left(\frac{t_n}{t_p}\right)^5 \left(\frac{E_{n0}}{E_{p0}}\right)^2}$$

Cum pentru lumina naturală $E_{n0}^2 = E_{p0}^2$ rezultă

$$P = \frac{1-\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2}{1+\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2} = \frac{1-0{,}67}{1+0{,}67} = 0{,}198$$

*

32. Conform rezultatelor din problema anterioară coeficienţii Fresnel de transmisie pentru componentele normală şi paralelă ale câmpului electric, relativ la planul de incidenţă în urma parcurgerii unei plăci, au valorile $t_n = \frac{2}{n^2+1}$ şi $t_p = \frac{1}{n}$ în ipoteza incidenţei brewsteriene, astfel că prin parcurgerea a *k* lame de sticlă, câmpurile normal pe planul de incidenţă şi paralel cu acesta se pot exprima funcţie de componentele incidente corespunzătoare prin relaţiile :

$$E_{tn}^{(k)} = \left(\frac{2}{1+n^2}\right)^k E_{in}$$

$$E_{tp}^{(k)} = \left(\frac{1}{n}\right)^k E_{ip}$$

Rezultă pentru gradul de polarizare *P*,

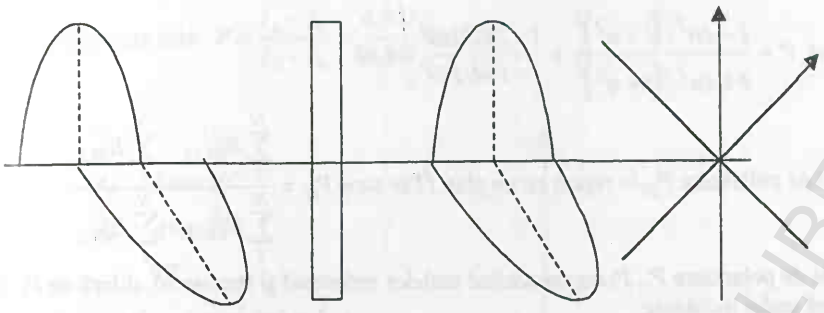
$$P = \frac{I_p - I_n}{I_p + I_n} = \frac{1-\frac{I_n}{I_p}}{1+\frac{I_n}{I_p}} = \frac{1-\left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^{2k}}{1+\left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^{2k}}$$

şi impunând condiţia de polarizare $P = 0{,}9$ se obţine $k \cong 16$ plăci.

*

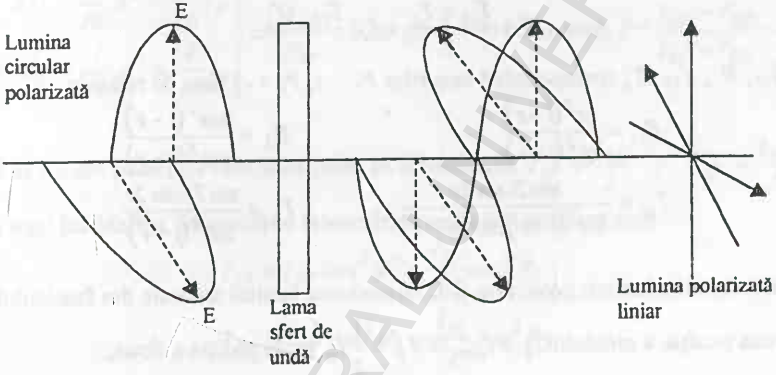
33. Lumina circular polarizată poate fi descompusă în două componente de amplitudini egale, decalate una faţă de cealaltă cu $\frac{\lambda}{4}$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Componenta pe direcţia razei ordinare va suferi o întârziere de $\frac{\lambda}{4}$ deci decalajul între cele două raze ori se anulează (în cazul luminii polarizate circular dreapta) sau devine $\frac{\lambda}{2}$.

Rezultă că dincolo de lamă, lumina este polarizată cu direcţia de oscilaţie a vectorului electric E orientată la 45^0 faţă de direcţia axei optice a lamei.



Prin reducerea la jumătate a grosimii lamei lumina devine polarizată eliptic.

*

34.

a). Conform legii Brewster , lumina reflectată este polarizată dacă

$$tg\, i_B = n\ .\ i_B = arctg1{,}5 = 56^0 15'$$

b). Gradul de polarizare al luminii refractate : $P = \dfrac{I_{II} - I_\perp}{I_{II} + I_\perp} = \dfrac{1 - I_\perp / I_{II}}{1 + I_\perp / I_{II}}$

$$\frac{I_\perp}{I_{II}} = \left(\frac{E_\perp}{E_{II}}\right)^2_r = \left(\frac{E_\perp}{E_{II}}\right)^2_i \left(\frac{2\sin r \cos i \sin(i+r)}{2\sin r \cos i \sin(i+r)}\right) \cos^2(i-r) = \left(\frac{E_\perp}{E_{II}}\right)^2_{inc} \cos^2(i-r)$$

Lumina incidentă fiind naturală există relaţiile 1) - 4):

$$1).\ (E_\perp)^2_{inc} = (E_{II})^2_{inc}\ ;$$

$$2).\ \frac{I_\perp}{I_{II}} = \cos^2(i_B - r);$$

$$3).\ \sin i_B = n \sin r\ ;$$

$$4).\ i_B + r = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(i_B - r) = 2\sin i_B = \frac{2n}{1+n^2}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultă: $P = \dfrac{1-4n^2/(1+n^2)^2}{1+4n^2/(1+n^2)^2} = \dfrac{1-144/169}{1+144/169} = 0.08$

Gradul de polarizare $P_{//}$ în raport cu un plan Π se scrie $P_{\Pi} = \dfrac{\sum_1^N E_{0k//}^2 - \sum_1^N E_{0k\perp}^2}{\sum_1^N E_{0k//}^2 + \sum_1^N E_{0k\perp}^2}$.

Gradele de polarizare P_r, P_t corespunzând undelor *reflectată* şi *transmisă*, diferă de P_i corespunzând undei incidente.

$$P_r = \frac{\left|\cos^2(i+r)\right|(1+P_i) - \left|\cos^2(i-r)\right|(1-P_i)}{\left|\cos^2(i+r)\right|(1+P_i) - \left|\cos^2(i-r)\right|(1-P_i)} \; ; \; P_t = \frac{(1+P_i) - \left|\cos^2(i-r)\right|(1-P_i)}{(1+P_i) + \left|\cos^2(i-r)\right|(1-P_i)}$$

Coeficienţii de reflexie şi transmisie ai undei, depind de gradul de polarizare al undei incidente.

$$R = \frac{R_{//} + R_\perp}{2} + P_i \cdot \frac{R_{//} - R_\perp}{2}$$

$$T = \frac{T_{//} + T_\perp}{2} + P_i \cdot \frac{T_{//} - T_\perp}{2}$$

valorile $R_{//}$, $R_\perp$, $T_{//}$, $T_\perp$ corespunzând cazurilor $P_i = 1$, $P_i = -1$ date de relaţiile

$$R_{//} = \frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)} \qquad R_\perp = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$$

$$T_{//} = \frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)\cos^2(i-r)} \qquad T_\perp = \frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)}$$

*

35. Fie I_p intensitatea luminii polarizate şi I_n intensitatea luminii naturale din fasciculul incident. În prima poziţie a nicolului $I_1 = I_{max} = I_p + \frac{1}{2} I_n$ iar în poziţia a doua,

$$I_2 = I_p \cos^2 60^\circ + \frac{1}{2} I_n = \frac{1}{4} I_p + \frac{1}{2} I_n$$

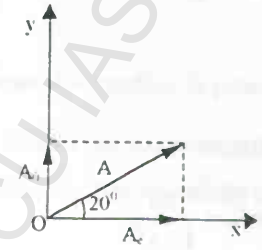
şi din condiţia ca $I_2 = \frac{1}{2} I_1$ rezultă că: $\frac{1}{4} I_p + \frac{1}{2} I_n = \frac{1}{2}(I_p + \frac{1}{2} I_n)$ sau $I_p = I_n$.

Intensitatea maximă va fi egală cu $I_{max} = \frac{3}{2} I_p$ iar cea minimă $I_{min} = I_p \cos^2 90^\circ + \frac{1}{2} I_n = \frac{1}{2} I_p$.

Gradul de polarizare va fi egal cu $P = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \dfrac{3/2 I_p - \frac{1}{2} I_p}{3/2 I_p + \frac{1}{2} I_p} = \frac{1}{2}$.

*

36.



$$\left.\begin{aligned} A_0 &= A \sin 20^\circ \\ A_e &= A \cos 20^\circ \\ I_0 &= A^2 \sin^2 20^\circ \\ I_e &= A^2 \cos^2 20^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{I_e}{I_0} = 7{,}55$$

BCU IAŞI / CITIRE LA UNIVERSITY LIBRARY

Gradul de polarizare este $P = \dfrac{I_e - I_0}{I_e + I_0} = \dfrac{6{,}55I_0}{8{,}55I_0} = 70\%$.

*

37.

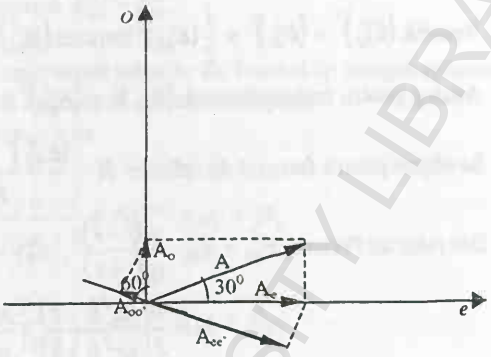
$$A_e = A\cos 30^\circ$$

$$A_0 = A\sin 30^\circ$$

iar

$$A_{ee'} = A_e \cos 30^\circ = A\cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}A$$

$$A_{00'} = A_0 \cos 60^\circ = A\sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}A$$



$$\left.\begin{aligned} I_{ee'} &= A_{ee'}^2 = \frac{9}{16}A^2 = \frac{9}{16}I_0 \\ I_{00'} &= A_{00'}^2 = \frac{1}{16}A^2 = \frac{1}{16}I_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{I_{ee'}}{I_{00'}} = 9$$ iar gradul de polarizare: $P = \dfrac{I_{ee'} - I_{00'}}{I_{ee'} + I_{00'}} = 80\%$.

*

38. După ce ies din polarizor cele două unde au intensitățile $I_{1P} = \dfrac{I_{01}}{2}$; $I_{2P} = \dfrac{I_{02}}{2}$.

Conform legii lui Mallus, intensitățile fasciculelor ieșite din analizor sunt

$$I_{1A} = I_{1P}\cos^2\theta_1 = \frac{I_{01}}{2}\cos^2\theta_1$$

$$I_{2A} = I_{2P}\cos^2\theta_2 = \frac{I_{02}}{2}\cos^2\theta_2$$

Din condiția $I_{1A} = I_{2A}$ se obține :

$$\frac{I_{01}}{I_{02}} = \frac{\cos^2\theta_0}{\cos^2\theta_1} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

*

39.

$$E_0 = E\sin 45^0$$

$$E_e = E\cos 45^0$$

Analizorul va lăsa să treacă componentele :

$$E_{Ae} = E\sin 45^0 \cos 45^0$$

$$E_{Ao} = E\cos 45^0 \sin 45^0$$

Aceste componente sunt defazate cu $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\delta$ unde : $\delta = (n_e - n_0)d = k_{cel}E_{cel}^2\lambda d$

deci $\varphi = 2\pi E_{cel}\left(\dfrac{U}{l}\right)^2 \cdot d = 40\pi$ și lama va acționa *ca o lamă undă*. Intensitatea transmisă va fi nulă.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

40.

a). Factorul de reflexie $R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right)^2$. Cum unda incidentă este naturală, $E'_{01} = E^{\perp}_{01}$.

Rezultă, $\left(E'_{01}\right)^2 = \left(E^{\perp}_{01}\right)^2 = \frac{1}{2}(E_{01})^2$ întrucât $\left(E'_{01}\right)^2 + \left(E^{\perp}_{01}\right)^2 = (E_{01})^2$.

Analog pentru unda reflectată: $(E_{02})^2 = \left(E'_{02}\right)^2 + \left(E^{\perp}_{02}\right)^2$

Se obține pentru factorul de reflexie $R = \frac{\left(E'_{02}\right)^2 + \left(E^{\perp}_{02}\right)^2}{E_{01}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{E'_{02}}{E'_{01}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{E^{\perp}_{02}}{E^{\perp}_{01}}\right)^2$.

Din relațiile Fresnel, $E'_{02} = E'_{01} \cdot \frac{tg(i-r)}{tg(i+r)}$, $E^{\perp}_{02} = E^{\perp}_{01} \cdot \frac{sin(r-i)}{sin(i+r)}$ rezultă,

$$R = \frac{1}{2}\left[\frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)} + \frac{sin^2(r-i)}{sin^2(r+i)}\right].$$

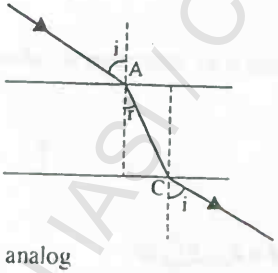
Sub incidență brewsteriană $tg\ i_B = n = 1{,}54 \Rightarrow i_B = 57° \Rightarrow r = 35°$.
Se obține $R = 0{,}083$ ceea ce înseamnă că 8,3% din intensitatea fasciculului incident se reflectă, adică $\tau = 91{,}7\%$ din intensitatea fasciculului incident se transmite.

b). Din definiția gradului de polarizare, $P = \frac{I_{//} - I_{\perp}}{I_{//} + I_{\perp}}$ unde $I_{//}$ este intensitatea luminii al cărei vector electric vibrează într-un plan paralel cu planul de incidență, iar $I_{\perp}$ intensitatea luminii cu vectorul electric vibrând într-un plan perpendicular pe planul la incidență.Folosim relațiile Fresnel pentru unda transmisă:

$E^{//}_{03} = \frac{2\sin r\cos r}{\sin(i+r)\cos(i-r)} E^{//}_{01}$; $E^{\perp}_{03} = \frac{2\sin r\cos i}{\sin(i+r)} E^{\perp}_{01}$ și cum $i = i_B$, iar $i_B + r = \frac{\pi}{2}$, rezultă :

$E^{//}_{03} = \frac{1}{tgi_B} E^{//}_{01} = \frac{E^{//}_{01}}{n}$ și $E^{\perp}_{03} = 2E^{\perp}_{01}\cos^2 i_B = \frac{2E^{\perp}_{01}}{1+n^2}$. Întrucât lumina incidentă este naturală,

$E^{//}_{01} = E^{\perp}_{01}$ și obținem : $P = \frac{\left(E^{//}_{03}\right)^2 - \left(E^{\perp}_{03}\right)^2}{\left(E^{//}_{03}\right)^2 + \left(E^{\perp}_{03}\right)^2} = \frac{1 - \frac{4n^2}{\left(1+n^2\right)^2}}{1 + \frac{4n^2}{\left(1+n^2\right)^2}} = 0{,}091 = 9{,}1\%$.



c) Fie A și C punctele în care radiația intră și iese din lamă. Notăm cu E_{04} amplitudinea undei ce a trecut prin lamă și folosim iarăși formulele lui Fresnel:

$$\left(E^{//}_{04}\right)_C = \left(E^{//}_{03}\right)_C \cdot \frac{2\sin i\cos r}{\sin(i+r)\cos(r-i)} =$$

$$= \frac{E^{//}_0 \cdot 2\sin^2 i_B}{n\sin 2i_B} = \frac{E^{//}_0}{n} tgi_B = E^{//}_{01}$$

și analog

$$\left(E^{\perp}_{04}\right)_C = \left(E^{\perp}_{03}\right)_C \frac{2\sin i\cos r}{\sin(i+r)} = \frac{2E^{\perp}_{01}}{1+n^2} \cdot 2\sin^2 i_B = \frac{4n^2}{\left(1+n^2\right)^2} E^{\perp}_{01}$$

Se obține pentru gradul de polarizare,

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$P=\frac{\left(E_{04}^{11}\right)^2-\left(E_{04}^{\perp}\right)^2}{\left(E_{04}^{11}\right)^2+\left(E_{04}^{\perp}\right)^2}=\frac{\left(1+n^2\right)^4-4^2n^4}{\left(1+n^2\right)^4+4^2n^4}=7\%$$

S-a ținut de asemenea seama că în lumină naturală $E_{01}^{11}=E_{01}^{\perp}$.

*

41. În cazul incidenței normale pe suprafața unui metal relațiile lui Fresnel își mențin aplicabilitatea numai că indicele de refracție real va fi înlocuit cu indicele complex.

$$n'=n_r-j\alpha$$

Astfel, coeficientul de reflexie

$$r=\frac{E_{02}}{E_{01}}=\frac{n'-1}{n'+1}=\frac{n_r-j\alpha-1}{n_r-j\alpha+1}=Ae^{j\varphi_r}=a_r+jb_r$$

iar coeficientul de transmisie

$$t=\frac{E_{03}}{E_{01}}=\frac{2}{n'+1}=\frac{2}{n_r-j\alpha+1}=Be^{j\varphi_t}=a_t+jb_t.$$

Prin identificare și folosind relațiile lui Euler, obținem :

$$\begin{cases}A\cos\varphi_r=a_r\\ A\sin\varphi_r=b_r\end{cases}\quad\text{și}\quad\begin{matrix}B\cos\varphi_t=a_t\\ B\sin\varphi_t=b_t\end{matrix}$$

din care ,

$$tg\varphi_r=\frac{b_r}{a_r};\ tg\varphi_t=\frac{b_t}{a_t}$$

Calculând a_r și b_r, rezultă $a_r=\frac{\left(n_r^2-1\right)+\alpha^2}{\left(n_r+1\right)^2+\alpha^2}$ și $b_r=\frac{-2\alpha}{\left(n_r+1\right)^2+\alpha^2}$ astfel că

$$tg\varphi_r=\frac{b_r}{a_r}=\frac{-2\alpha}{\left(n_r^2-1\right)+\alpha^2}.$$

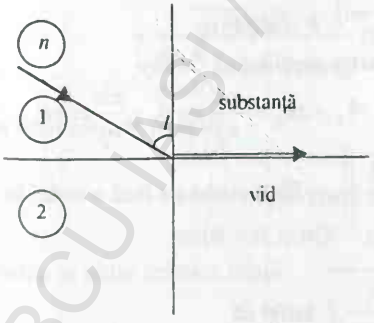
Procedând analog, se obține: $tg\varphi_t=\frac{b_t}{a_t}=\frac{\alpha}{n_r+1}$.

*

42.

1). Din relația $\frac{\sin 1}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{n}$ rezultă $n=\sqrt{2}$ care corespunde unui unghi Brewster

$i_B=arctg\sqrt{2}=54^0 44'$.



2) la reflexie totală $\left(i=1;r=\frac{\pi}{2}\right)$ relațiile Fresnel, devin:

$$E_{02}^{11}=E_{01}^{11}\frac{tg(i-r)}{tg(i+r)}=E_{01}^{11}\frac{tg\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}{tg\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}=E_{01}^{11}$$

3)

$$E_{02}^{\perp}=E_{01}^{\perp}\frac{\sin(r-i)}{\sin(i+r)}=E_{01}^{\perp}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{\sin\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}=E_{01}^{\perp}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Intensitatea luminii reflectate total I_2 ,va fi :

$$I_2 = \left(E_{02}^{11}\right)^2 + \left(E_{02}^{\perp}\right)^2 = \left(E_{01}^{11}\right)^2 + \left(E_{01}^{\perp}\right)^2 = I_1$$

Această relație evidențiază conservarea energiei totale prin reflexie totală.

*

43.

a).Notăm cu E_P componenta paralelă a câmpului cu planul de incidență și cu $E_n$componenta perpendiculară pe planul de incidență.

Avem: $E_{rp} = -\dfrac{tg(\alpha_i - \alpha_t)}{tg(\alpha_i + \alpha_t)} E_{ip}$; $E_{rn} = -\dfrac{sin(\alpha_i - \alpha_t)}{sin(\alpha_i + \alpha_t)} E_{in}$

Rezultă raportul între intensitățile radiațiilor incidentă și reflectată :

$$\eta = \frac{E_{rp}^2 + E_{rn}^2}{E_{ip}^2 + E_{in}^2} = \left[\frac{tg(\alpha_i - \alpha_t)}{tg(\alpha_i + \alpha_t)}\right]^2 \cdot \frac{E_{ip}^2}{E_{ip}^2 + E_{in}^2} + \left[\frac{sin(\alpha_i - \alpha_t)}{sin(\alpha_i + \alpha_t)}\right]^2 \cdot \frac{E_{in}^2}{E_{ip}^2 + E_{in}^2}$$

și cum radiația incidentă este nepolarizată, se obține :

$$\eta = \frac{1}{2}\left[\frac{tg(\alpha_i - \alpha_t)}{tg(\alpha_i + \alpha_t)}\right]^2 + \left[\frac{sin(\alpha_i - \alpha_t)}{sin(\alpha_i + \alpha_t)}\right]^2 = 0{,}17$$

b); $\left|\dfrac{E_{rp}}{E_{rn}}\right| = \dfrac{tg(\alpha_i - \alpha_t)}{tg(\alpha_i + \alpha_t)} \cdot \dfrac{sin(\alpha_i + \alpha_t)}{sin(\alpha_i - \alpha_t)} = \dfrac{cos(\alpha_i - \alpha_t)}{cos(\alpha_i + \alpha_t)} = 2{,}8$

*

44. $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m$; $\varepsilon_0 = 8{,}856 \cdot 10^{-12}\ F/m$; $\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\pi}{8{,}856} \cdot 10^5\ \dfrac{H}{F}$

$$\frac{H}{F} = \frac{rad}{s} \cdot H \cdot \frac{1}{\frac{rad}{s} \cdot F} = \Omega^2; \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 377\Omega \Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{377\Omega} \cdot 9 \cdot 10^{12} \frac{V^2}{m^2} = 1{,}2 \cdot 10^{10} \frac{W}{m^2}$$

*

45.

$$\frac{sin\theta_i}{sin\theta_t} = \frac{n_2}{n_1}, n_2 < n_1$$

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$$sin\,\theta_t = \frac{sin\,\theta_i}{n_{12}}$$

Dacă $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ relația poate fi satisfăcută pentru un unghi θ_t complex.În mediul al doilea unda electromagnetică este descrisă de ecuația $\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_0}$.

Alegem sistemul de coordonate astfel ca planul de separare a mediilor să fie *xoy*.

Avem: $k_x = \dfrac{\omega}{v_2} sin\,\theta_t$, $k_z = \dfrac{\omega}{v_2} cos\,\theta_t, k_y = 0$; $\vec{kr} = xk_z + yk_y + zk_z = \dfrac{x\omega}{v_2} sin\,\theta_t + \dfrac{z\omega}{v_2} cos\,\theta_t$

$v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_0}}$ și $E_2 = E_{20}\, exp\left\{-j\omega\left[t - \dfrac{x\,sin\,\theta_t + z\,cos\,\theta_t}{v_2}\right]\right\}$, v_2 fiind viteza de fază a undei în mediul al doilea.

Din $sin\,\theta_t = \dfrac{sin\,\theta_i}{n} \Rightarrow cos\,\theta_t = \sqrt{1 - \dfrac{sin^2\,\theta_i}{n_{12}^2}} = \pm j\sqrt{\dfrac{sin^2\,\theta_i}{n_{12}^2} - 1}$,astfel că:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E_2 = E_{20}\, exp\left[- j\omega\left(t - \frac{x \sin\theta_i}{v_2 n_{12}} \mp \frac{jz\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n_{12}^2} - 1}}{v_2} \right) \right]$$

$$E_2 = E_{20}\, exp\left[- j\omega\left(t - \frac{x \sin\theta_i}{v_2 n_{12}} \right) \right] exp\left[\mp \frac{\omega z\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n_{12}^2} - 1}}{v_2} \right]$$

La $z \to \infty$, $E_2 \to 0$ se ia deci semnul "-" .Având în vedere că v_1 este viteza de fază în primul mediu , avem $v_2 n_{12} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_0}} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}} = v_1$.

$$E_2 = E_{20}\, exp\left[- j\omega\left(t - \frac{x \sin\theta_i}{v_1} \right) \right] exp\left[- \frac{z\omega\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n_{12}^2}}}{v_2} \right]$$

Fie $\chi = \frac{\omega}{v_2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n_{12}^2} - 1}$ .Rezultă că unda se propagă pe suprafața de separare a mediilor. În mediul II *unda pătrunde, dar nu se propagă*. Pentru adâncimea $d = \frac{1}{\chi}$ amplitudinea scade de " e " ori, deci intensitatea de " e^2 " ori: $d = \frac{1}{\chi} = \frac{v_2}{\omega\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n_{12}^2} - 1}}$

Calculele pentru sticlă - aer ; apă - aer , etc.se recomandă studenților.

*

46.

$$E_{11}^t = E_{11}^i \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1\left(\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_i + \cos\theta_t\right)} E_{11}^i =$$

$$= \frac{2\cos\theta_i}{\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}\cos\theta_i + \cos\theta_t} E_{11}^i = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin\theta_i \cos\theta_i + \sin\theta_t \cos\theta_t} E_{11}^i$$

S-a ținut cont de relațiile:

$$sin(\theta_i + \theta_t) = sin\theta_i\, cos\theta_t + sin\theta_t\, cos\theta_i$$

$$cos(\theta_i - \theta_t) = cos\theta_i\, cos\theta_t + sin\theta_i\, sin\theta_t$$

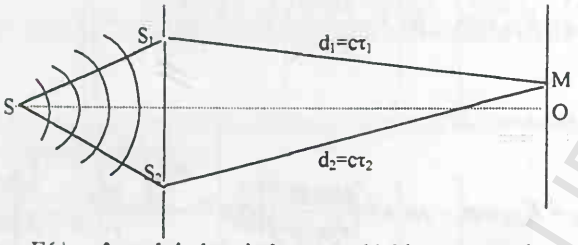
$$sin(\theta_i + \theta_t)cos(\theta_i - \theta_t) = \cdots = sin\theta_i\, cos\theta_t + sin\theta_t\, cos\theta_i$$

Analog se obțin celelate relații.

*

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

47. Avem, succesiv : $\tau_1 = \frac{d_1}{c}, \tau_2 = \frac{d_2}{c}$.



a).Intensitatea $E(t)$ a câmpului electric în punctul M la momentul t se exprimă, prin $E(t) = E_1(t-\tau_1) + E_2(t-\tau_2)$ astfel că intensitatea luminii în M va fi proporţională cu media :

$$I_M \approx \overline{[E_1(t-\tau_1)+E_2(t-\tau_2)]\cdot[E_1^*(t-\tau_1)+E_2^*(t-\tau_2)]} =$$
$$= \overline{E_1(t-\tau_1)E_1^*(t-\tau_1)} + \overline{E_2(t-\tau_2)E_2^*(t-\tau_2)} + \overline{E_1(t-\tau_1)E_2^*(t-\tau_2)} +$$
$$+ \overline{E_1^*(t-\tau_1)E_2(t-\tau_2)}$$

Introducând variabila $\tau = \tau_1 - \tau_2$ şi prin translaţii temporale ce nu modifică valorile medii, rezultă :

$$I \approx \overline{E_1(t)E_2^*(t)} + \overline{E_2(t)E_2^*(t)} + \overline{E_1(t+\tau)E_2^*(t)} + \overline{E_1^*(t-\tau)E_2(t)} \approx$$
$$\approx I_1 + I_2 + 2Re\left[E_1(t+\tau)E_2^*(t)\right]$$

Deci : $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, Re\,\gamma_{12}(2)$

b) Notăm cu $\varphi_{12}(\tau)$ diferenţa de fază între undele ce pleacă din S_1 şi S_2 şi cu φ diferenţa de fază datorată diferenţei de drum dintre cele două radiaţii ajunse în M: $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(S_2M - S_1M)$

deci: $\gamma_{12}(\tau) = \frac{E_1(t+\tau)\cdot E_2(t)}{\sqrt{I_1 I_2}} = |\gamma_{12}(\tau)| exp[i(\varphi_{12} - \varphi)]$ şi ,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\gamma_{12}(\tau)cos(\varphi_{12} - \varphi)$$

*

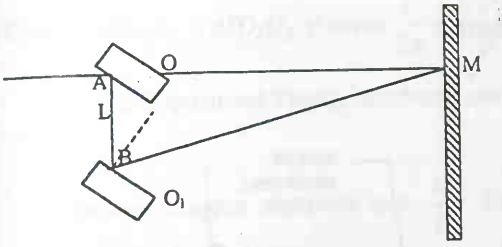
48. Dispariţia imaginii de interferenţă pentru distanţe mai mari decât L, pentru un grup de unde de durată τ_c, înseamnă că momentul în care prima oscilaţie din trenul de unde ajunge în M pe traseul ABM este ulterior momentului în care ultima oscilaţie din trenul de unde ajunge în M pe traseul AMConsiderând că AM ≅ BM, $\tau_c = \frac{L}{c} = 10^{-9} s$ iar numărul de oscilaţii pentru care câmpul poate fi socotit coerent, este: $N = \frac{\tau}{T} = \frac{L/c}{\lambda/c} = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.5}{5\cdot 10^{-5}} = 5\cdot 10^4$.

*

49. Diferenţa de drum între razele ABM şi AM, este $L = ABM - AM = m\lambda$ pentru maxim, în timp ce minimul se produce pentru $L = (2m-1)\cdot\frac{\lambda + \Delta\lambda}{2}$.

Rezultă , $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{\frac{2L}{\lambda} - 1}$ sau $\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2L} = 5\cdot 10^{-10} cm$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



50. Folosim rezultatele obținuteîn problema anterioară $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}$ și ținem seama că $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Prin diferențiere, obținem lărgimea benzii de frecvențe

$$|\Delta\nu| = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{c}{2L}$$

Cum $\tau_c = \frac{L}{c}$ rezultă $\Delta\nu = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tau_c}$ din care obținem: $\tau_c = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Delta\nu}$. În definitiv, $\Delta\nu = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = 10^{10}\,Hz$.

*

51. Folosim $\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta\nu = -c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ și obținem: $\tau_c = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$. Lungimea de coerență este lungimea unui tren de undă cu durata τ_c: $L = c\cdot\tau_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{5^2\cdot 10^6\cdot 10^{-20}}{0{,}5\cdot 10^{-10}}m = 0{,}5cm$.

*

52.

$$\overline{E_1} = \overline{E_{01}}\cos\omega t = E_{01}\cdot\overline{e_1}\cos\omega t$$

$$\overline{E_2} = \overline{E_{02}}\cos(\omega t+\varphi) = \overline{E_{02}}\cdot\overline{e_2}\cos(\omega t+\varphi)$$

unde E_{01} și E_{02} sunt amplitudinile celor două unde, iar $\overline{e_1}$ și $\overline{e_2}$ direcțiile lor de polarizare.

Unda rezultantă va fi: $\overline{E} = \overline{E_1} + \overline{E_2} = \overline{E_{01}}\cos\omega t + \overline{E_{02}}\cos(\omega t+\varphi)$

iar intensitatea undei la un moment dat

$$I = \overline{E^2} = E_{01}^2\cos^2\omega t + E_{02}^2\cos^2(\omega t+\varphi) + 2\overline{E_{01}}\cdot\overline{E_{02}}\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi)$$

Intensitatea medie a undei rezultante, este:

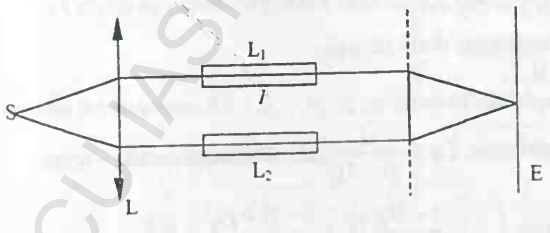
$$\bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T E^2dt = E_{01}^2\cdot\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2\omega t dt + E_{02}^2\cdot\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t+\varphi)dt +$$

$$+\frac{2\overline{E_{01}}\cdot\overline{E_{02}}}{T}\int_0^T\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi)dt$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 + \frac{2}{T}\overline{E_{01}}\cdot\overline{E_{02}}\int_0^T\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi)dt$$

unde $I_1 = E_{01}^2 \quad ; \quad I_2 = E_{02}^2$

Pentru ca să obținem fenomenul de interferență $\bar{I} = \frac{I_1+I_2}{2} = constant$ indiferent de diferența de fază φ, este necesar ca $\overline{E_{01}}\cdot\overline{E_{02}} = 0$ adică cele două unde liniar polarizate să aibă planele de polarizare reciproc perpendiculare.



*

53. Fie n' indicele de refracție al amoniacului. Diferența de drum între cele două raze va fi:

$$\Delta = (n'-n)l$$

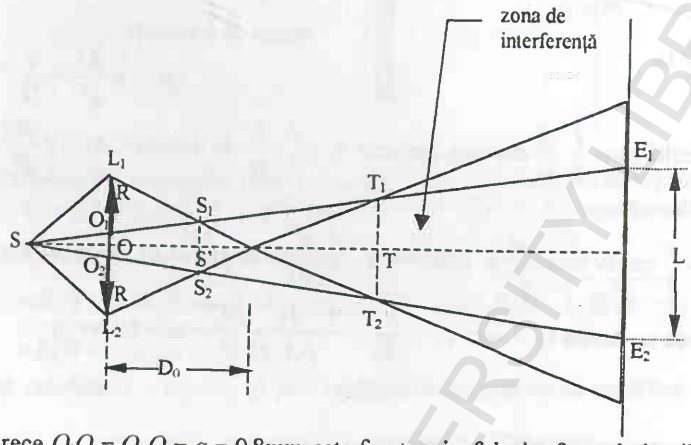
În cazul înlocuirii aerului cu amo –

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

niac, $\Delta = N \cdot l$. Se obține: $n' = n + \dfrac{N \cdot \lambda}{l} = 1{,}000377$.

*

54.



1).Deoarece $O_1O = O_2O = a = 0{,}8mm$ este foarte mic, folosim formula lentilelor subțiri:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \quad unde \quad p = SO = \frac{9f}{5}$$

$$\Delta SS_1S' \sim \Delta SO_1O \Rightarrow \frac{S'S_1}{a} = \frac{p+p'}{p}$$

Din aceste relații, se obține;

$$S'S_1 = a\frac{p}{p-f} \Rightarrow S_1S_2 = 2a\frac{p}{p-f} = 3{,}6mm$$

2).Din asemănarea triunghiurilor IS_1S' și IL_1O avem:

$\dfrac{D_0}{D_0 - p'} = \dfrac{2R}{S_1S_2}$ de unde $D_0 = \dfrac{2pr}{2R - S_1S_2} = \dfrac{pr}{R - a\dfrac{p}{p-f}} = 99{,}8cm$.

3).Calculăm distanța $h=IT$: $\Delta IT_1T_2 \sim \Delta IS_1S_2$. Avem:

$$\frac{T_1T_2}{S_1S_2} = \frac{h}{D_0 - p'} \quad Cum \quad \Delta ST_1T_2 \sim \Delta SO_1O_2,$$

$$\frac{T_1T_2}{2a} = \frac{p + D_0 + h}{p} \quad Se\ obtine$$

$$\frac{p-f}{p} = \frac{pf}{(D_0 - p')(p + D_0 + h)} \Rightarrow h = 11{,}1cm$$

Pentru lărgimea L a câmpului de interferență apar două situații:

a) ecranul situat între I și T;

b) ecranul situat în dreapta lui T

Cazul a. Pentru cazul când $\angle T_1IT_2 = 2\alpha$ este mic, $2\alpha \cong \dfrac{L}{D - D_0}$; D = distanța lentilă –ecran

Din ΔIS_1S_2 avem: $2\alpha \cong \dfrac{S_1S_2}{D_0 - p'}$. Se obține: $L = \left(\dfrac{D - D_0}{D_0 - p'}\right) S_1S_2 = \dfrac{D - D_0}{D - p'} \cdot \dfrac{2ap}{p - f}$.

BCUJASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cazul b. $\Delta SE_1E_2 \sim \Delta SO_1O_2$ şi avem: $\frac{L}{2a} = \frac{D+p}{p}$ încât $L = \frac{2a(D+p)}{p}$

4).Ca şi în dispozitivul Young, interfranja este dată de $i = \frac{\lambda \cdot (S'E)}{S_1S_2} = \frac{\lambda \cdot (D-p)}{2a\frac{p}{p-f}} = 0,117mm$.

5).Numărul franjelor observate este $\frac{L}{i}$: Cum $D = 1,6m >> D_0 + h = 110,9cm$ suntem în cazul b.Din $L = \frac{2a(D+p)}{p} = 5,15cm$ se obţine $\frac{L}{i} = 44\,franje$.

*

55. Se obţin succesiv, valorile :

$$\tau_c = \frac{L}{c} = 3,3 \cdot 10^{-5}\,s$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau_c} = 3 \cdot 10^{4}\,Hz$$

şi $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu = 0,36 \cdot 10^{-5}\,nm$.

*

56.

1).Maximele principale de ordinul *k* şi *k+1* apar când sunt îndeplinite condiţiile:

$$\sin\theta_k = k\frac{\lambda}{d}$$

$$\sin\theta_{k+1} = (k+1)\frac{\lambda}{d}$$

de unde rezultă: $\sin\theta_{k+1} - \sin\theta_k = \frac{\lambda}{d}$ *din care,* $d = \frac{\lambda}{\sin\theta_{k+1} - \sin\theta_k} = \frac{6000 \cdot 10^{-10}m}{0,3-0,2} = 6 \cdot 10^{-6}\,m$

2) $maxim \Leftrightarrow k\,\lambda = d\sin\theta_k$ pentru ordin maxim, $\theta_{k'} = \pi/2 \Leftrightarrow \sin\theta_{k'} = 1 \Rightarrow$

$$k_{max} = k' = \frac{d}{\lambda} = \frac{6 \cdot 10^{-6}\,m}{6000 \cdot 10^{-8}\,m} = 10$$

*

57.

1).Constanta reţelei este $d = a+b = 0,5 \cdot 10^{-5}m$. Din condiţia de apariţie a maximului de ordinul*k*, se obţine: $d\sin\theta_k = k\lambda$ .Pentru $k=4$ şi $\theta = 30°$, avem

$$\lambda = \frac{d\sin\theta_k}{k} = \frac{0,5 \cdot 10^{-5} \cdot \sin 30°}{4} = 625,0nm$$

2).Condiţiile pentru obţinerea maximelor radiaţiilor extreme ale domeniului vizibil, sunt:

$$\sin\theta_r = \frac{\lambda_r}{d}\,;\ \sin\theta_v = \frac{\lambda_v}{d}$$

Unghiul de dispersie $\Delta\theta = \theta_r - \theta_v$ se calculează astfel:

$$\sin\Delta\theta = \sin(\theta_r - \theta_v) = \sin\theta_r\sqrt{1-\sin^2\theta_v} - \sin\theta_v\sqrt{1-\sin^2\theta_r} =$$

$$= \frac{1}{d^2}(\lambda_r\sqrt{d^2-\lambda_v^2} - \lambda_v\sqrt{d^2-\lambda_r^2}) = \frac{1}{d}(\lambda_r - \lambda_v)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru unghiuri mici, $\sin\Delta\theta \cong \Delta\theta = \frac{1}{d}(\lambda_r - \lambda_v) = \frac{0{,}35\cdot 10^{-6}}{0{,}5\cdot 10^{-5}} = 0{,}07 rad.$

3).Suprapunerea spectrelor începe atunci când maximul de ordin k al radiației roșii se suprapune peste maximul de ordin $k+1$ al radiației violet, adică:

$$\sin\theta_r^{(k)} = k\frac{\lambda r}{d} = \sin\theta_v^{(k+1)} = (k+1)\frac{\lambda v}{d}$$

de unde rezultă $k = \frac{\lambda_v}{\lambda_r - \lambda_v} = \frac{0{,}4}{0{,}35} = 1{,}143$. Deci în maximul de ordinul II există deja suprapunerea.

*

58.

1).Puterea de rezoluție a unei rețele de difracție este: $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N\cdot k$ unde N este numărul total de linii al rețelei, iar k ordinul de difracție, λ și $\lambda+\Delta\lambda$, lungimile de undă ale liniilor care sunt rezolvate de rețea. Constanta rețelei este: $d = a + b = \frac{1}{n}$ unde n este numărul total de trăsături pe unitatea de lungime, iar $N=n\cdot l$ încât $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = knl = \frac{kl}{d}$. Se poate considera $\lambda \cong \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ *iar* $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ și rezultă $d = k\lambda\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2kl(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Calculele numerice dau $d=25{,}5\cdot 10^{-4} cm$.

2).Condiția de obținere a maximelor de difracție este: $\pm d\sin\theta = k\lambda \qquad k = 0,1,2,3...$

Unghiul maxim de difracție este $\theta_{max} = \pi/2$ care conduce la $k_{max} = \frac{d\sin\theta_{max}}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} \cong 43$

3).Dispersia unghiulară a rețelei este: $D = \frac{d\theta}{d\lambda}$ unde $d\theta$ este distanța unghiulară dintre maximele de același ordin al radiațiilor cu lungimile de undă λ și $\lambda+\Delta\lambda$.
Avem $d\cos\theta d\theta = kd\lambda$ din care,

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{d\cos\theta} = \frac{k}{d(1-\sin^2\theta)1/2} = \frac{k}{d\left[1 - \frac{k^2\lambda^2}{d^2}\right]^{1/2}} = \frac{k}{\sqrt{d^2 - k^2\lambda^2}}.$$

Calcul numeric: $D = \frac{d\theta}{d\lambda} = 4\cdot 10^4 rad/m.$

*

59.

1) $d\sin\theta = k\lambda \Rightarrow \sin\theta = \frac{k\lambda}{d} = nk\lambda$ Deci: $\sin\theta = 3n\lambda = 4n\lambda' \Rightarrow \lambda' = \frac{3}{4}\lambda = 472{,}5 nm$.

2) $n = \frac{\sin\theta}{k\lambda} = \frac{\sin 60^\circ}{3\cdot 63\cdot 10^{-8} cm} = 46\cdot 10^4 tras/mm$.

3)Dispersia unghiulară a rețelei este $D = \frac{k}{d\cos\theta} = \frac{kn}{\cos\theta} = 276\cdot 10^4 rad/s$.

*

60.

1) $d\sin\theta_{1r} = \lambda_r$; $d\sin\theta_{2v} = 2\lambda_v$. Suprapunerea cere ca $\theta_{1r} = \theta_{2v} \Rightarrow \lambda_r = 2\lambda_v$ condiție ce nu se

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

poate îndeplini în realitate deoarece $\lambda_r < 2\lambda_v$.

2). Este însă posibilă suprapunerea altor ordine de difracţie ale celor două radiaţii:

$$\left.\begin{aligned} d\sin\theta &= k_1\lambda_r \\ d\sin\theta &= k_2\lambda_v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\lambda_r}{\lambda_v} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{700}{400} = \frac{7}{4}$$

adică se poate suprapune ordinul 7 al radiaţiei violet cu ordinul 4 al radiaţiei roşii. Avem de asemenea, $n = \frac{1}{d} = \frac{\sin\theta}{k_1\lambda_1} = \frac{0{,}5}{7\cdot 400\cdot 10^{-9}\,m} = 178 tras/mm$.

3). $k_{1max} = \frac{d\sin\theta_{max}}{\lambda_1} = \frac{d}{\lambda_1} = \frac{1}{n\lambda_1} = 14\,; k_{2max} = \frac{1}{n\lambda_2} = 8$.

*

61. Va trebui să calculăm amplitudinea rezultată din compunerea undelor:

$y_1 = a\,;\ y_2 = a\cos\varphi\,;\ y_3 = a\cos 2\varphi\,;\ y_4 = a\cos 3\varphi ... y_N = a\cos[(N-1)\varphi]$

Folosind scrierea exponenţială a undelor, unda rezultantă de amplitudine A şi fază φ_0, are forma:

$$Ae^{j\varphi_0} = a + ae^{j\varphi} + ae^{2j\varphi} + ... + ae^{j(N-1)\varphi} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} e^{j(k-1)\varphi} = \frac{e^{jN\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}$$

Deci: $Ae^{j\varphi_0} = a\frac{e^{jN\varphi} - 1}{e^{j\varphi} - 1}$. Intensitatea luminii se calculează astfel:

$$I = Ae^{j\varphi_0}Ae^{-j\varphi_0} = a\frac{e^{jN\varphi} - 1}{e^{j\varphi} - 1}\cdot a\frac{e^{-jN\varphi} - 1}{e^{-j\varphi} - 1} \quad sau$$

$$I = A^2 = a^2\frac{2 - (e^{jN\varphi} + e^{-jN\varphi})}{2 - (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})} = a^2\frac{\sin^2\frac{N\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

Discuţie: I are valoarea maximă când numitorul se anulează, rezultând:

$$\varphi_{max} = \pm 2k\pi \quad ; \quad k = 0,1,2,.....$$

$$I = 0 \Rightarrow \varphi_{min} = \pm 2k\frac{\pi}{N} \quad ; \quad n = 1,2,3,.....,N-1,N+1,.....$$

Poziţia maximelor secundare se obţin prin anularea derivatei $\frac{dI}{d\varphi}$. Se obţine ecuaţia transcendentă $N tg\frac{\varphi}{2} = tg\frac{N\varphi}{2}$, care rezolvată conduce la

$$\varphi_{max,sec.} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{N}, \quad (k = 1,2,3,.....,N-1,N+1,.....)$$

Pentru a calcula I_{max}, scriem:

$$\sin^2\frac{N\varphi}{2} = \frac{tg^2\frac{N\varphi}{2}}{1 + tg^2\frac{N\varphi}{2}} = \frac{N^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}{1 + N^2 tg^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{N^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2} + N^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{N^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{1 + (N^2-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$I = a^2\frac{N^2}{1 + (N^2-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

din care rezultă că maximul principal corespunzător lui $\varphi = 0$, conduce la $I_{max} = a^2 I^2$.

*

62. În mediul anizotrop se folosesc ecuațiile $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ și $\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Dacă propagarea câmpului se realizează sub forma undelor armonice, vectorii $\vec{E}$, $\vec{D}$, și $\vec{H}$ sunt proporționali cu factorul $e^{j\omega t}$ și ecuațiile de mai sus devin: $\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D}$; $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$.
Mai mult, operatorul "nabla" în cazul undelor progresive se înlocuiește cu $-jk\vec{n}$.

Obținem: $-jk\vec{n} \times \vec{H} = j\omega \vec{D}$ și $-jk\vec{n} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$. Cum $k = \frac{\omega}{v}$, aceste relații se scriu încă:

$\vec{H} \times \vec{n} = v\vec{D}$ și $\vec{E} \times \vec{n} = -\mu_0 v \vec{H}$. Eliminând $\vec{H}$ între aceste relații, obținem $\vec{D} = -\frac{1}{\mu_0 v^2} \vec{n} \times (\vec{v} \times \vec{E})$

sau, folosind identitatea vectorială $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{a}\vec{b}) - a^2 \vec{b}$ relația devine:

$\vec{D} = \frac{1}{\mu_0 v^2} \left[\vec{E} - \vec{n}(\vec{n}\vec{E})\right]$ astfel că se poate scrie densitatea volumică de energie electrică:

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2\mu_0 v^2} \left[E^2 - (\vec{n} \cdot \vec{E})^2\right]$$

iar pentru densitatea de energie magnetică, $w_M = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 = \frac{1}{2\mu_0 v^2} (\vec{E} \times \vec{n})^2$.

sau, ținând seama de identitatea $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ obținem: $w_M = \frac{1}{2\mu_0 v^2} \left[E^2 - (\vec{n} \cdot \vec{E})^2\right]$

adică $w_M = w_e$. Densitatea volumică totală va rezulta, ca: $w = \frac{1}{\mu_0 v^2} \left[E^2 - (\vec{n} \cdot \vec{E})^2\right]$ *expresie ce pune în evidență o proporționalitate a densității volumice de energie electromagnetică cu pătratul indicelui de refracție.*

*

63. Dacă câmpul E al luminii incidente face un unghi α cu axa optică a polarizorului, acesta va permite să treacă doar componenta $E\cos\alpha$ a cărei intensitate va fi proporțională cu $E^2 \cos^2 \alpha$. Considerând α variabil, astfel încât să descrie pentru E toate direcțiile din spațiu, intensitatea luminoasă ce străbate polarizorul se obține integrând după α.

$$I = kE^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 d\alpha = k \frac{E^2}{2} = \frac{b}{2}$$

Un procent din aceasta va fi absorbită în polarizor astfel că la analizor va ajunge $I = \frac{I_0}{2} \eta$.

În succesiunea fascicul-polarizor-analizor acesta din urmă va permite să treacă numai componenta $E \cos \theta$ astfel că dincolo de analizor intensitatea luminii va fi $I'' = I' \cos \theta$ în care I' reprezintă intensitatea fasciculului incident pe analizor din care numai fracțiunea $\eta E^2 \cos^2 \theta$ părăsește analizorul. Rezultă: $I'' = \frac{I_0}{2} \eta^2 \cos^2 \theta$. Obținem $\frac{I''}{I_0} = \frac{0,9^2}{8} = 0,1$.

*

64.

1) $\lambda_0 = v \cdot T = \frac{c}{n} T = \frac{\lambda}{n}$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se obţin valorile

- pentru raza extraordinară : $\lambda_e = \frac{\lambda}{n_e} = 396,3nm$;
- pentru raza ordinară : $\lambda_0 = \frac{\lambda}{n_0} = 355,2nm$.

2). Diferenţa de drum între cele două raze este $\delta = (n_0 - n_e)d$, unde d este grosimea cristalului. Diferenţa de fază este dată de expresia : $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_0 - n_e)d$.

Rezultă, $d = \frac{\lambda}{2\pi(n_0 - n_e)} \cdot \Delta\varphi$ care se particularizează la valorile:

$$d\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,42\mu m.; d\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,6\mu m.; d(\pi) = 1,7\mu m .$$

3). Vectorul electric se descompune în două componente de amplitudinii egale ce se propagă cu viteze diferite ceea ce generează defazaj.

$$E_x = E\sin\omega t$$
$$E_y = E\sin(\omega t + \Delta\varphi)$$

- pentru $\Delta\varphi = \pi \Rightarrow E_y = -E\sin\omega t = -E_x$, polarizarea e liniară ;
- pentru $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow E_y = E\cos\omega t$ şi $E_x^2 + E_y^2 = E^2$ polarizarea e circulară;
- pentru

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}, E_y = E\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}E(\sin\omega t + \cos\omega t) \Rightarrow$$

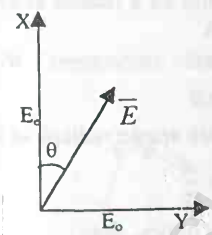
$$\Rightarrow \left(E_y - \frac{\sqrt{2}}{2}E_x\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}E_y^2 = E^2$$

şi se obţine lumină eliptic polarizată.

*

65.

a). Proiecţiile vectorului E pe direcţia axei optice, respectiv perpendiculară pe axa optică vor fi : $E_e = \cos\theta$; $E_0 = \sin\theta$.



Pentru ca după trecerea prin lamă vectorul $\vec{E}$ să oscileze perpendicular pe direcţia iniţială între cele două componente va trebui să existe un defazaj de $\varphi = (2p+1)\pi$.

Vitezele diferite ale celor două raze corespund la doi indici de refracţie diferiţi. $n_e = \frac{c}{v_e}$ şi $n_0 = \frac{c}{v_0}$ .Diferenţa de drum între aceste raze, va fi : $\delta = (n_e - n_0)\,d$ iar diferenţa de fază, $\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_0)d = (2p+1)\pi$.

Se obţine, $d(n_e - n_0) = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$ (*lamă jumătate de undă*);

b) În acest caz , $\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_0)d = p\pi$ din care, $d(n_e - n_0) = p\frac{\lambda}{2}$;

c) $\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_0)d = (2p+1)\frac{\pi}{2}$ şi $d(n_e - n_0) = \left(p + \frac{1}{4}\right)\lambda$ (*lamă sfert de undă*).

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

66.

a) Câmpul electric al fasciculului poalarizat liniar se poate descompune într-o componentă extraordinară E_e pe direcţia axei optice şi una ordinară pe direcţia perpendiculară .

- Lama semiundă va produce o întârziere a componentei ordinare cu $\delta = \frac{\lambda}{2}$ corespunzătoare unui defazaj $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \pi$ între raza ordinară şi cea extraordinară. Radiaţia rămâne liniar polarizată, însă planul de polarizare se roteşte cu 90^0.

- Lama sfert de undă va produce o întârziere a undei cu $\delta = \frac{\lambda}{4}$ corespunzând unei diferenţe de fază $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{\pi}{2}$. Rezultă:

$$E_e = E\cos\omega t$$

$$E_0 = E\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E\sin\omega t$$

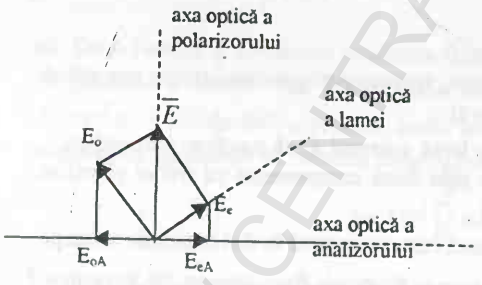
care conduce la expresia $E_e^2 + E_0^2 = E^2$ corespunzătoare unei polarizări circulare.

b)descompunem radiaţia circular polarizată în două componente liniar polarizate pe direcţia axei optice şi pe cea perpendiculară.

- lama jumătate de undă, va decala raza ordinară cu $\frac{\pi}{4}$ în urma celeilalte. Va apare un defazaj de $\frac{\pi}{2}$ sau $\frac{3\pi}{2}$ a celor două raze, lumina rămânând cirular polarizată însă cu schimbarea sensului de rotaţie al vectorului $\vec{E}$.

- în cazul lamei sfert de undă, componenta ordinară va fi decalată cu $\frac{\pi}{2}$ în urmă, defazajul total între cele două raze va fi 0 sau π, deci radiaţia va fi liniar polarizată.

*



67. La ieşirea din analizor vectorul câmp electric $\vec{E}_A$ poate fi calculat funcţie de valoarea câmpului electric $\vec{E}_P$ dată de polarizor. Notăm cu E_e şi E_0 componentele amplitudinii E_P a razelor extraordinară şi ordinară în lamă:

$$E_e = E_P\cos\theta$$

$$E_0 = E_P\sin\theta$$

Defazajul indus de lamă între aceste radiaţii va fi

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Analizorul va lăsa să treacă numai proiecţiile acestora pe direcţia axei lui optice, deci :

$$E_{eA} = E_0\sin\theta = E_P\cos\theta\sin\theta = E_P\frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$E_{oA} = E_0\cos\theta = -E_P\sin\theta\cos\theta = -E_P\frac{\sin 2\theta}{2}$$

astfel că ţinând seama de defazaj, rezultă pentru elongaţiile câmpurilor

$$E_{eA}(t) = \frac{E_P}{2}\sin 2\theta\sin\omega t$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E_{oA}(t) = \frac{E_P}{2} \sin 2\theta \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E_P}{2} \sin 2\theta \cos \omega t$$

Aceste componente permit scrierea câmpului electric la ieşirea din analizor :

$$E_A(t) = E_{oA}(t) + E_{oe}(t) = (E_P/2)\sin 2\theta(\sin \omega t + \cos \omega t).$$

Rezultă pentru intensitatea radiaţiei la ieşirea din analizor,

$$I = k \cdot E_A^2 = k \cdot \frac{E_P^2}{4} \sin^2 2\theta [1 + 2 \sin 2\omega t]$$

care mediată pe o perioadă, conduce la $\bar{I} = k \frac{E_P^2}{4} \sin^2 2\theta = \frac{I_0}{4} \sin^2 2\theta$.

Pentru $\theta = 15^0$, $\frac{\bar{I}}{I_0} = \frac{\sin^2 30^0}{4} = 0.06$

*

68.

a).Dacă I_0 este intensitatea luminii incidente pe polarizor, intensitatea luminii rezultate din polarizor va fi $\frac{I_0}{2}$. La trecerea prin lama semiundă nu se mai pierde din intensitate, însă planul de polarizare va fi rotit cu 90^0 deci va căpăta direcţia axei optice a acestuia care va lăsa astfel să treacă întreaga radiaţie incidentă pe el.

b).Lama sfert de undă transformă radiaţia polarizată liniar în radiaţia polarizată circular, fără a-i modifica intensitatea.

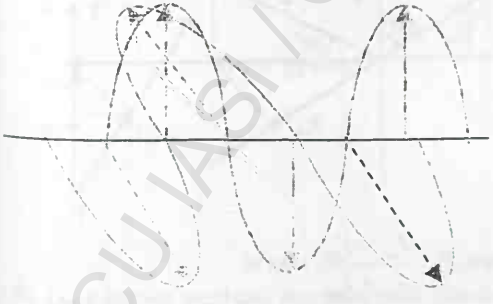
c).După parcurgerea celui de al doilea polarizor, intensitatea luminii incidente pe el polarizată liniar prin străbaterea primului polarizor, va evolua în concordanţă cu legea lui Mallus.

*

69. Primul polarizor scade intensitatea luminii naturale I_0 la valoarea $\frac{I_0}{2}$ şi polarizează fasciculul incident în lungul axei sale. Următoarele N plăci birefrigerente vor roti planul de polarizare cu unghi total egal cu $N \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. În acest fel planul de polarizare rotit va dobândi o orientare paralelă cu oirentarea ultimului polarizor. Intensitatea luminii emergente va avea aceeaşi valoare $\frac{I_0}{2}$ considerând neglijabilă absorbţia luminii în lame.

*

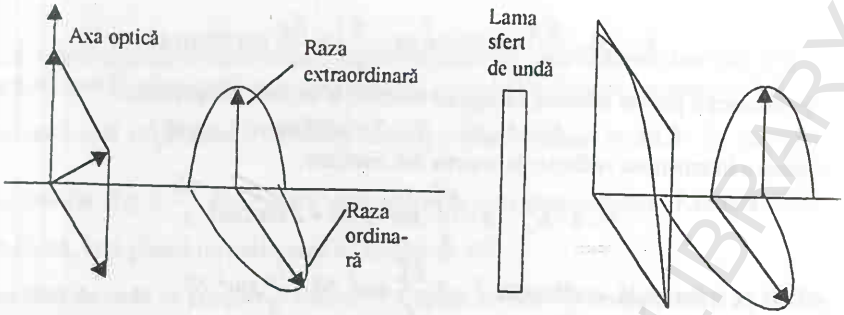
70. Componenta vectorului $\vec{E}$ pe direcţia axei optice are valoarea $\frac{E}{2}$ iar componenta perpendiculară pe axa optică are valoarea $\frac{E\sqrt{3}}{2}$.



Această componentă se propagă în direcţia razei ordinare şi la trecerea prin lamă va suferi un decalaj de $\frac{\lambda}{4}$ faţă de prima componentă corespunzând unui defazaj egal cu $\frac{\pi}{2}$.

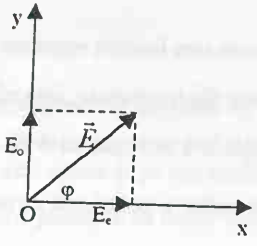
Prin recompunerea celor două componente se va obţine ecuaţia unei elipse.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



*

71. Descompunem vectorul $\vec{E}$ în componentele pe direcțiile razelor ordinară și extraordinară perpendiculare între ele. $E_0 = E \sin \varphi$; $E_e = E \cos \varphi$.



Intensitățile radiațiilor transmise, vor fi ;

$$I_0 = E^2 \sin^2 \varphi$$

$$I_e = E^2 \cos^2 \varphi$$

iar raportul lor $\frac{I_e}{I_0} = ctg^2 \varphi = 7{,}55$ pentru $\varphi = 20^0$.

Gradul de polarizare $P = \frac{I_e - I_0}{I_e + I_0} = \frac{6{,}55 I_0}{8{,}55 I_0} = 0{,}7 (70\%)$.

*

72. În lumină polarizată prin reflexie vectorul $\vec{E}$ vibrează într-un plan perpendicular pe direcția de propagare. Dacă $\vec{E}$ ar fi conținut în planul de incidență, prin reflexie el s-ar roti odată cu frontul undei la 90^0 și vectorii luminoși E_i și E_r ar forma într ei un unghi de 90^0 astfel că interferența nu ar fi posibilă. Singura direcție de vibrație pentru $\vec{E}$ care se conservă prin reflexie, încât razele incidentă și reflectată să permită suprapunerea vectorilor luminoși, este cea perpendiculară pe planul de incidență.

*

73. Prezentăm în figură propagarea radiației prin cele două cristale

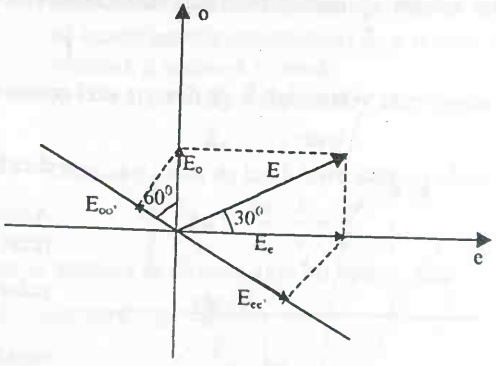
$E_e = E \cos 30^0$

$E_0 = E \sin 30^0$

Proiecțile acestor componente pe axa optică a celui de al doilea nicol, se scriu

$E_{ee'} = E_e \cos 30^0 = E \cos^2 30^0$

$E_{oo'} = E_0 \cos 60^0 = E \sin^2 30^0$



Rezultă $E_{ee'} = (3/4)E$; $E_{oo'} = (1/4)E$

iar pentru intensitățile corespunzătoare,

$$I_{ee'} \approx E_{ee'}^2 = \frac{9}{16} E^2 \approx \frac{9}{16} I_0$$

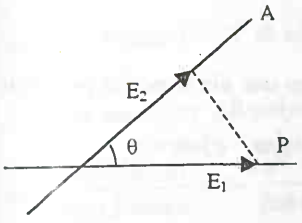
$$I_{oo'} = k_{oo'} \cdot E_{oo'}^2 = \frac{k_{oo'}}{16} \cdot E^2 = \frac{1}{16} I_0$$

Se obține: $\frac{I_{ee'}}{I_{oo'}} = 9$, iar pentru gradul de polarizare, $P = \frac{I_{ee'} - I_{oo'}}{I_{ee'} + I_{oo'}} = 80\%$

*

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

74. La ieşirea din polarizor lumina naturală incidentă pe acesta având intensitatea I_0 va părăsi polarizorul polarizată liniar la o valoare a intensităţii radiaţiei egală cu 0.9 din $\frac{I_0}{2}$ (*10 %* fiind absorbită în polarizor) şi la o valoare a amplitudinii câmpului electric $E_1 = \sqrt{0.45\, I_0}$ astfel că amplitudinea câmpului electric ce vibrează în direcţia axei optice a analizorului este $E_2 = E_1 \cos\theta$ cores - punzând uneiintensităţi $I_2 \approx E_2^2 = E_1^2 \cos^2\theta \approx 0{,}45 I_0 \cos^2\theta$

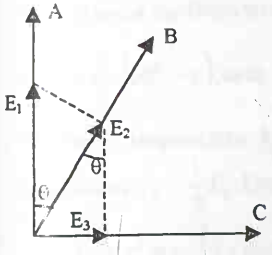


Analizorul, atenuează şi el radiaţia, astfel că intensitatea luminii ce părăseşte analizorul, va fi: $I_2 = 0{,}90 \cdot 0{,}45\, I_0 \cos^2\theta$ şi se poate calcula raportul cerut : $\frac{I_2}{I_1} = 0{,}9 \cdot 0{,}45 \cos^2\theta = 0{,}15$

Se obţine : $\cos\theta = 0{,}5 \rightarrow \theta = 60^0$.

*

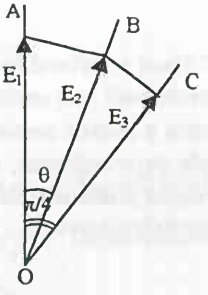
75.



a) $\alpha = \frac{\pi}{2}$: Considerăm că intensitatea undei incidente este I_0 . Polarizorul A transmite radiaţie cu intensitatea $\frac{b}{2}$ şi amplitudinea $E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$. Polarizorul B transmite unda incidentă la o amplitudine E_2 în conformitate cu legea lui Mallus:

$$E_2 = E_1 \cos\theta = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\theta$$

iar amplitudinea undei transmise va fi : $I_3 = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\theta$.



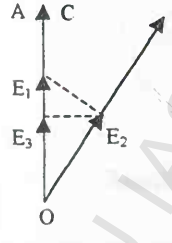
b) $\alpha = \frac{\pi}{4}$: În acest caz,

$$E_3 = E_2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = E_2 \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$E_2 = E_1 \cos\theta = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\theta$$

Rezultă $E_3 = \frac{E_0}{2} \cos\theta(\cos\theta + \sin\theta)$ şi

$$I_3 = \frac{I_0}{4} \cos^2\theta(\cos\theta + \sin\theta)^2$$



c) $\alpha = 0$.Avem :

$$E_3 = E_2 \cos\theta = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos^2\theta$$

$$I_3 = \frac{I_0}{2} \cos^4\theta$$

*

76. Dacă lumina incidentă este polarizată circular, oscilaţiile componente sunt perpendiculare, în fază şi au aceeaşi amplitudine : $E_x = E_0 \cos\omega t$; $E_y = E_0 \sin\omega t$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Lama introduce defazajul φ şi la ieşirea din lamă oscilaţiile devin

$$E_{x1} = E_0 \cos\omega t$$

$$E_{y1} = E_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

La ieşirea din analizor, al cărui plan principal face un unghi α cu una din direcţiile principale ale lamei, oscilaţia rezultantă va fi :

$$E_2 = E_{x1}\cos\alpha + E_{y1}\sin\alpha = E_0\cos\omega t\cos\alpha + E_0\sin(\omega t - \varphi)\sin\alpha =$$

$$= E_2'\cos\omega t + E_2''\sin\omega t$$

cu $E_2^I = E_0(\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha)$ şi $E_2^{II} = E_0\cos\varphi\sin\alpha$.

Pătratul amplitudinii câmpului electric rezultant va fi egal cu :

$$E^2 = E_2'^2 + E_2''^2 = E_0^2\left(\cos^2\varphi\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\varphi\sin^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\varphi\sin\alpha\right) =$$

$$= E_0^2(1 - \sin\varphi\sin 2\alpha)$$

în care E_0^2 este pătratul amplitudinii câmpului electric incident.

$$\frac{E^2}{E_0^2} = 1 - \sin 2\alpha\sin\varphi = 1 - \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

Pătratul amplitudinii câmpului electric este maxim sau minim dacă

$$\frac{\partial E^2}{\partial\alpha} = -2E_0^2\cos 2\alpha\sin\varphi = 0. \begin{cases}\cos 2\alpha = 0\\ \sin 2\alpha = \pm 1\end{cases}$$

$$\sin 2\alpha = -1 : E_{max}^2 = E_0^2(1 + \sin\varphi) = \frac{3}{2}E_0^2$$

$$\sin 2\alpha = 1 : E_{min}^2 = E_0^2(1 - \sin\varphi) = \frac{1}{2}E_0^2$$

*

77. Unda polarizată liniar, după trecerea prin lamă se transformă într-o undă polarizată eliptic, caracterizată prin oscilaţiile simultane :$x = a\cos\omega t$; $y = b\cos(\omega t + \delta)$.

Pentru a calcula semiaxele elipsei scriem componentele x şi y ale vectorului electric faţă de axele de coordonate, rotite cu unghiul θ faţă de sistemul de axe iniţial, care coincide cu direcţiile principale ale lamei.Unghiul θ este unghiul făcut de direcţiile principale ale lamei cu semiaxele elipsei :

$$x' = a\cos\theta\cos\omega t + b\sin\theta\cos(\omega t + \delta) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$y' = -a\sin\theta\cos\omega t + b\cos(\omega t + \delta) = B\cos(\omega t + \beta)$$

Constantele A şi B se determină identificând coeficienţii lui $\cos\omega t$ şi $\sin\omega t$:

$$A\cos\alpha = a\cos\theta + b\sin\theta\cos\delta$$

$$A\sin\alpha = b\sin\theta\sin\delta$$

$$B\cos\beta = -a\sin\theta + b\cos\theta\cos\delta$$

$$B\sin\beta = b\cos\theta\sin\delta$$

Ridicăm la pătrat relaţiile şi le adunăm $A^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + ab\sin 2\theta\cos\delta$.

Analog,

$$B^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - ab\sin 2\theta\cos\delta$$

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2$$

$$A^2 - B^2 = a^2\cos 2\theta - b^2\cos 2\theta + 2ab\sin 2\theta\cos\delta$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru ca amplitudiile A şi B să corespundă oscilaţiilor de-a lungul axelor elipsei trebuie ales în aşa fel θ încât $A^2 - B^2$ să aibă o valoare extremă: $\frac{d\left(A^2 - B^2\right)}{d\theta} = 0 \Rightarrow tg\,2\theta = \frac{ab}{a^2 - b^2}\cos\delta$

Avem de asemenea $AB\sin(\alpha-\beta) = -ab\sin\delta$ şi $AB\cos(\alpha-\beta) = ab\cos 2\theta\cos\delta - \frac{a^2-b^2}{2}\sin 2\theta$

sau $\frac{AB\cos(\alpha-\beta)}{ab\cos 2\theta\cos\delta} = 1 - \frac{a^2-b^2}{2ab\cos\delta}tg2\theta = 1 - \frac{a^2-b^2}{2ab\cos\delta}\cdot\frac{2ab\cos\delta}{a^2-b^2} = 0 \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = 0$

$\Rightarrow \alpha - \beta = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow AB = \pm ab\sin\delta$. Dar $\frac{b}{a} = tgi$. Notăm $\frac{B}{A} = tgI$. Avem:

$$\sin 2I = \frac{2tgI}{1+tg^2 I} = \frac{2AB}{A^2+B^2} = \frac{2ab\sin\delta}{a^2+b^2} = \sin 2i\sin\delta = \sin\frac{\pi}{2}\sin 37^0 = 0.6$$

sau $3tg^2I - 10tgI + 3 = 0$ de unde $\frac{B}{A} = tgI = 3$ *sau* $\frac{1}{3}$.

*

78. Din legea lui Brewster $tg\,i = \frac{\sin i}{\cos i} = \frac{n_2}{n_1}$ şi legea refracţiei $\frac{\sin i}{\cos i} = \frac{n_2}{n_1}$ se obţine $\frac{\sin r}{\cos i} = 1$ sau $\sin r = \sin\left(90^0 - r\right)$, ceea ce implică $i + r = 90^0$

*

79. Fie I_0 intensitatea luminii naturale. După ce trece prin polarizor, raza de lumină are intensitatea $I_1 = \frac{1}{2}I_0$. După ce trece prin analizor, intensitatea acestei raze de lumină va fi: $I_2 = I_1\cos^2\alpha = \frac{1}{2}I_0\cos^2\alpha$. Potrivit enunţului problemei, $I_2 = \frac{1}{4}I_0$ şi rezultă

$$\cos^2\alpha = \frac{0{,}25}{0{,}50} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

*

II.6 RELATIVITATE RESTRÂNSĂ

1. Norma unui cuadrivector fiind invariantă rezultă că $x_\mu = (\vec{r}, ict)$ şi $x_{\mu_0} = \left(\vec{r}_0 = \vec{0}, ict_0\right)$ au evident aceeaşi normă. Deci $dx_\mu^2 = dr^2 - c^2d\tau^2$; $d\sigma^2 = dx_{\mu_0}^2 = -c^2d\tau_0^2$. De aici rezultă,

$$d\tau_0^2 = \frac{d\sigma^2}{-c^2} \Rightarrow d\tau_0 = \frac{d\sigma}{ic}.$$

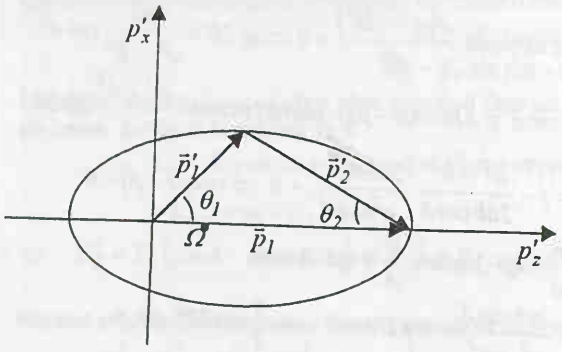
*

2. $$tg\,\varphi = \frac{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\sin\varphi}{v'\cos\varphi' + v_0}.$$

*

3. $$\rho = \frac{masa}{volum} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(V_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1} = \frac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



4. $p_\mu = m_0 v_\mu = \left(\vec{p}, i\frac{E}{c}\right)$, ($\mu = 1, 2, 3$)

$$p_1 = \frac{p'_1 + v_0 \frac{E'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}};$$

$$p_2 = p'_2; \quad p_3 = p'_3;$$

$$E = \frac{E' + v_0 p'_1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Un observator „avizat"va face comparația cu transformările corespunzătoare ale componentelor lui x_μ $(\vec{r}, ict)$ și va remarca „corespondența inversă", „E" se transformă nu ca timpul ci ca poziția și „p" nu ca spațiul ci ca timpul. Acest rezultat este important pentru aceia care studiază electrodinamică cuantică.

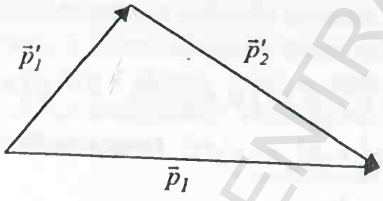
*

5. Avem evident $\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$.

Vom rezolva problema în sistemul centrului de masă (SCM) desemnat prin asterisc presupunând o mișcare a acestuia de-a lungul axei Oz. Vom considera relațiile de trecere pentru valorile impulsului de la SCM la SL presupunând că $\vec{p}'_1$ aparține planului xoz din SCM.

$$p'_{1x} = p'^*_{1x}; p'_{1y} = p'^*_{1y} = 0; p'_{1z} = \alpha\left(p'^*_{1z} + \frac{v}{c^2}E'^*_1\right)$$

unde v este viteza cu care se deplasează SCM de-a lungul lui Oz în Sistemul SL al laboratorului, iar E'^*_1 este energia particulei proiectil în SCM.



Dar așa cum se știe: $\vec{p}'^*_1 + \vec{p}'^*_2 = 0$, $p'^*_1 = p^*_1, p^*_2 = p^*_1$ și singura transformare care ne interesează rezultă a fi: $p^*_{2z} = \alpha\left(p_{2z} - \frac{v}{c^2}E_2\right)$.

Cum $E_2 = 0$, $p^*_{2z} = -\alpha v m_{02}$ unde s-a notat cu α cantitatea $\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1}$ și cu v viteza cu care SCM se deplasează față de SL.

Dacă ținem seama că $\left(p'^*_1\right)^2 = p'^2_{1x} + \left(\frac{p'_{1z}}{\alpha} - \frac{v}{c^2}E'^*_1\right)^2$ împărțind prin $\left(p'^*_1\right)^2 = \left(p^*_1\right)^2$ vom obține

$$\frac{p'^2_{1x}}{p^{*2}_1} + \frac{\left(p'_{1z} - \alpha\frac{v}{c^2}E'^*_1\right)^2}{\alpha^2 p^{*2}_1} = 1$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

relație ce reprezintă ecuația

unei elipse cu semiaxele: $a = \alpha p_1^* = \alpha p_2^* = \alpha^2 v m_{02}$ și $b = p_1^* = \alpha v m_{02}$ cu „centrul" într-un

punct $\Omega\left(\alpha\frac{v}{c^2}E_1^*, 0\right)$.

*

6. Este cazul în care centrul elipsei din problema anterioară este dat chiar de semiaxa „*a*", deci

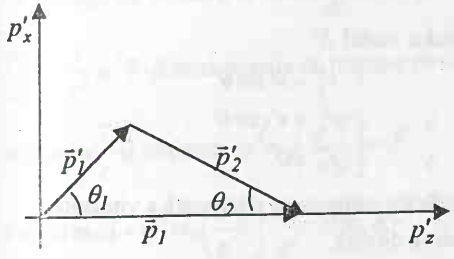
$$\alpha\frac{v}{c^2}E_1^* = a\,.$$

Fie θ unghiul format de direcțiile celor două particule după ciocnire. Avem:

$\theta = \pi - \alpha \Rightarrow \theta_{minim} = \pi - \alpha_{maxim}$ iar $\alpha = \alpha_{maxim}$

presupune $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\theta_{min}}{2}$ și $tg\frac{\theta_{min}}{2} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\alpha}$

din care rezultă $\theta_{minim} = 2arctg\frac{1}{\alpha}$.



*

7. În sistemul SL al laboratorului:

$$\vec{p}_2 = 0$$

$$E_2 = m_{02}c^2$$

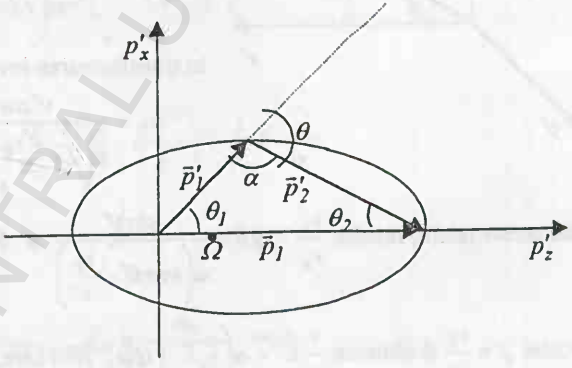
iar în sistemul SCM al centrului de masă, $E_2^* = \alpha E_2 = \alpha m_{02}c^2$.

Pe de o parte $E_2^* = E_2'^* = \alpha m_{02}c^2$ iar pe de altă parte $E_2'^* = \alpha(E_2' - v p'_{2z})$ și $p'_{2z} = |\vec{p}'_2|\cos\theta_2$ astfel că,

$$\left(\frac{E_2'^*}{\alpha} - E_2'\right) = v^2 p'_{2z}$$

relație echivalentă cu

$$\left(m_{02}c^2 - E_2'\right)^2 = v^2 p_2'^2 \cos^2\theta_2$$



în care vom ține seama că $\vec{v} = \frac{\vec{p}_1 c}{E_1 + m_{02}c^2}$ și vom obține în definitiv,

$$E_2' = m_{02}c^2\,\frac{\left(E_1 + m_{02}c^2\right)^2 + \left(E_1^2 - m_{01}^2c^4\right)\cos^2\theta_2}{\left(E_1 + m_{02}c^2\right)^2 - \left(E_1^2 - m_{01}^2c^4\right)\cos^2\theta_2}\,.$$

*

8. Scriem conservările impulsului și energiei:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_3$$
$$E_1 + E_2 = E_3$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$m_{02}c^2 + \sqrt{p_1^2c^2 + m_{01}^2c^4} = \sqrt{p_3^2c^2 + M_0^2c^4}$$

$$M_0 = \frac{1}{c^2}\left[\left(m_{01}^2 + m_{02}^2\right)c^2 + 2m_{02}\sqrt{p_1^2c^2 + m_{01}^2c^4}\right]^{1/2}$$

*

9. Scriem conservările impulsului şi energiei:

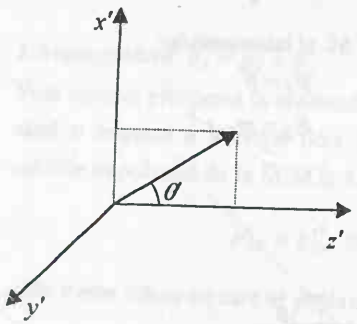
$$\vec{0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad E_1^2 = p_1^2c^2 + m_{01}^2c^4$$
$$M_0c^2 = E_1 + E_2 \Rightarrow E_2^2 = p_2^2c^2 + m_{02}^2c^4 \Rightarrow E_1^2 - E_2^2 = \left(m_{01}^2 - m_{02}^2\right)c^4$$

Rezultă, $E_{1,2} = \frac{c^2}{2}\frac{M_0^2 \pm m_{01}^2 \mp m_{02}^2}{M_0}$.

*

10. Scriem componentele vitezei $\vec{v}'$ pe axele sistemului mobil S':

$$v_x' = v'\sin\theta'$$
$$v_z' = v'\cos\theta'$$
$$v_y' = 0$$



Folosim relaţiile de compunere relativistă a vitezelor:
-în transformarea directă,

$$v_x' = \frac{v_x}{\alpha\left(1 - \frac{v_z v_0}{c^2}\right)};\ v_z' = \frac{v_z - v_0}{1 - \frac{v_z v_0}{c^2}} \quad \text{şi,}$$

-în transformarea inversă:

$$v_x = \frac{v'\sin\theta'}{\alpha\left(1 + \frac{v'v_0\cos\theta'}{c^2}\right)};\ v_z = \frac{v'\cos\theta' + v_0}{\left(1 + \frac{v'v_0\cos\theta'}{c^2}\right)}.$$

Din aceste relaţii, rezultă: $\frac{v_x}{v_z} = tg\theta = \frac{\sin\theta'}{\alpha\left(\cos\theta' + \frac{v_0}{v'}\right)}$ şi $\theta = arctg\,\frac{\sin\theta'}{\alpha\left(\cos\theta' + \frac{v_0}{v'}\right)}$.

Notăm $\beta \equiv \frac{v_0}{c}$ şi obţinem: $\frac{i}{c}E' = \alpha\left(\frac{i}{c}E - i\beta p_z\right)$ din care, $E = E' + v_0 p'\cos\theta'$.

*

11. Cuadriviteza $v_\mu = (\alpha\vec{v}, ic\alpha)$ permite calculul cuadriacceleraţiei prin intermediul formulei generale: $a_\mu = \frac{dv_\mu}{d\tau_0}$; Avem $\frac{d\alpha}{d\tau_0} = \frac{1}{c^2}\alpha^3(\vec{v}\cdot\vec{a})$ şi $\frac{d}{d\tau_0}(ic\alpha) = ic\alpha\frac{d\alpha}{dt} = \frac{i}{c}\alpha^4(\vec{v}\cdot\vec{a})$

$$\frac{d}{d\tau_0}(\alpha\vec{v}) = \alpha\frac{d}{dt}(\alpha\vec{v}) = \alpha^2\vec{a} + \alpha\frac{d\alpha}{dt}\vec{v} = \alpha^2\vec{a} + \alpha\frac{\frac{2\vec{v}}{c^2}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}}{2\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^3}\cdot\vec{v} =$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= \alpha^2 \vec{a} + \alpha \frac{1}{c^2} \alpha^3 (\vec{v} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{v} = \alpha^2 \vec{a} + \frac{\alpha^4}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{v} \text{ şi } \frac{d}{d\tau_0} (ic\alpha) = \frac{i}{c} \alpha^4 (\vec{v} \cdot \vec{a})$$

În cazul problemei, $\left(\frac{\vec{v}}{c} \vec{a}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{c} = \beta^2 a$ şi $a_\mu = \left(\alpha^2 a, \pm i \alpha^4 \beta a\right)$.

*

12. Dacă viteza variază ca direcţie, atunci $\vec{v}^2 = ct.$ care prin derivare dă $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$;

deci cuadrivectorul a_μ are în sistemul S componentele: $a_\mu \left(\alpha^2 \vec{a}, 0\right)$.

*

13. Ecuaţia de mişcare se scrie: $\frac{d}{dt}(\alpha m_0 \vec{v}) = \vec{F}$ sau $\alpha m_0 \vec{a} + m_0 \vec{v} \frac{d\alpha}{dt} = \vec{F}$.

$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{c^2} \alpha^3 \vec{v} \cdot \vec{a}$ deci ecuaţia de mişcare devine: $\alpha m_0 \vec{a} + \alpha^3 m_0 \left(\frac{\vec{v}}{c} a\right) \frac{\vec{v}}{c} = \vec{F}$. Înmulţim această

relaţie cu $\frac{\vec{v}}{c}$ şi obţinem $\alpha^3 m_0 \left[\vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right] = \vec{F} \cdot \frac{\vec{v}}{c}$.

Cum $\alpha m_0 \vec{a} + \alpha^3 m_0 \left(\frac{\vec{v}}{c} \vec{a}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{c} = \alpha m_0 \vec{a} + \left(\frac{\vec{v}}{c} \vec{F}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{c} = \vec{F}$, rezultă

$$\vec{a} = \frac{1}{m_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\vec{F} - \left(\frac{\vec{v}}{c} \vec{F}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right].$$

*

14.

$$\vec{F} \| \vec{v} \; ; \; \vec{a} = \frac{1}{m_0} \frac{1}{\alpha} \left(\vec{F} - \vec{F} \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{m_0} \vec{F} \cdot \frac{1}{\alpha^2}$$

$m_{\text{longitudinal}} = m_0 \alpha^3$

*

15.

$$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow m_{\text{transversal}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \alpha .$$

*

16.

$$v = \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}} \cdot c ; \quad S = \frac{c}{F} \left[\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} - m_0 c\right]$$

*

17.

$$v = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}} \quad ; \quad S = \frac{c^2}{a_0} \left[\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}} - 1\right]$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

18. $d\tau_0 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt\,;\ \tau_0 \int_0^t \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt$ în care v este viteza determinată în problema *16.*

$\Rightarrow \frac{c}{a_0} ln\left(\frac{a_0 t}{c}+\sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}}\right)$. Pentru timpi suficienți de lungi $\frac{a_0^2}{c} >> 1$ și $\tau_0 = \frac{c}{a_0} ln\, 2\frac{a_0 t}{c}$.

$\tau_0 \sim ln\, t$. adică timpul propriu al sistemului aflat în mișcare accelerată crește mult mai lent (cu logaritmul lui t) decât cel pentru sistemul aflat în „repaus".

*

19. $R = \frac{m_0 v}{qB}\cdot\alpha = \frac{mv}{qB}$.

*

20. $x = \frac{1}{eE}\sqrt{E_0 + (ceEt)^2}\,;\ \frac{ceEt}{E_c} = \frac{exp\left(\frac{eEv}{p_0 c}\right) - exp\left(-\frac{eEv}{p_0 c}\right)}{2}\,;\ y = \frac{p_0 c}{eE} arg\, sh\left(\frac{cEet}{E_0}\right)$.

*

21. $E_{cin} = mc^2 - m_0 c^2 \cong \frac{1}{2}m_0 V^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \ldots;\ v = \frac{\left(m^2 - m_0^2\right)^{1/2} c}{m}\,;\ p = mv = c\sqrt{m^2 - m_0^2}$

22. Ecuația de continuitate $\nabla\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, se scrie explicit în S : $\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

care prin considerarea relațiilor de transformare a derivatelor parțiale se transformă astfel,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial j_x}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial j_x}{\partial t'}\right) + \frac{\partial j_y}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial z'} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t'} - v\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{j_x - \rho v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) +$$

$$+\frac{\partial j_y}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\rho - \frac{v}{c^2}j_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{\partial j_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial j_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial j_{z'}}{\partial z'} + \frac{\partial\rho'}{\partial t'}$$

în baza invarianței ecuației de continuitate la schimbarea inerțialului. Prin identificare, se obțin relațiile de transformare: $j_{x'} = \frac{j_x - \rho v}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\ j_{y'} = j_y\,;\ j_{z'} = j_z\,;\ \rho' = \frac{\rho - \frac{v}{c^2}j_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Relațiile inverse se obțin simplu, trecând "v" în "$-v$" :

$$j_x = \frac{j_{x'} + \rho' v}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\ j_y = j_{y'}\,;\ j_z = j_{z'}\,;\ \rho = \frac{\rho' + \frac{v}{c^2}j_{x'}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

*

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

23. Se scrie ecuația de continuitate a sarcinii electrice $\nabla\vec{j}+\frac{d\rho}{dt}=0$. În spațiul Minkowski, pe componente : $\frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}+\frac{\partial(ic\rho)}{\partial x_4}=0$ care prin introducerea cuadrivectorului curent-sarcină $J_\nu\left(j_x,j_y,j_z,ic\rho\right)$, capătă forma : $\nabla\cdot\vec{J}_\nu=0$

Componentele acestui cuadrivector, se transformă în virtutea grupului transformărilor Lorentz

$$\begin{pmatrix}J_1'\\J_2'\\J_3'\\J_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\-i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_1\\J_2\\J_3\\J_4\end{pmatrix}$$

în care $\alpha\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ iar $\beta\equiv\frac{v}{c}$. Se obțin relațiile de transformare :

$J_1'=j_{x'}=J_1\alpha+i\alpha\beta J_4=\frac{J_1+i\beta J_4}{\sqrt{1-\beta^2}}$ echivalentă, cu : $j_{x'}=\frac{J_x+i\frac{v}{c}ic\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{j_x-\rho v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$;

$j_{y'}=j_y;j_{z'}=j_z$ şi $J_4'=-i\alpha J_1+\alpha J_4=\;=\frac{-i\frac{v}{c}j_x+ic\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}$, din care: $\rho'=\frac{\rho-\frac{v}{c^2}j_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Dacă densitatea de curent este nulă, $j=0$ obținem:

$\rho'=\frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};j_{x'}=\frac{-\rho v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};j_{y'}=j_y;\;\;j_{z'}=j_z$ şi notând Q şi Q' sarcinile totale în S şi S',

$$\rho=\frac{Q}{\Delta V}\Rightarrow Q=\rho\Delta V\;\text{ iar }\;Q'=\rho'\Delta'V=\frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\Delta V\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\rho\Delta V=Q.$$

*

24. Folosim legea circuitului magnetic $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\rho\vec{v}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, legea fluxului electric $\nabla\left(\varepsilon_0\vec{E}\right)=\rho$ şi expresia cuadrivectorului densitate de curent-sarcină $\vec{J}_\nu(\rho\vec{v},ic\rho)$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultă $\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial z}-\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}=\rho v_x=J_1$ echivalentă cu $\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}=-\mu_0 J_1$

care în spațiul Minkowski, se scrie:

$$\frac{\partial B_z}{\partial x_2}-\frac{\partial B_y}{\partial x_3}-\frac{\partial\left(\frac{i}{c}E_x\right)}{\partial(ict)}=\mu_0 J_1 \text{ sau } \frac{\partial B_z}{\partial x_2}+\frac{\partial(-B_y)}{\partial x_3}+\frac{\partial\left(-\frac{i}{c}E_x\right)}{\partial x_4}=\mu_0 J_1$$

Analog, se obțin și celelalte două relații :

$$\frac{\partial(-B_z)}{\partial x_1}+\frac{\partial B_x}{\partial x_3}+\frac{\partial\left(-\frac{i}{c}E_y\right)}{\partial x_4}=\mu_0 J_2 \text{ și } \frac{\partial B_y}{\partial x_1}+\frac{\partial(-B_x)}{\partial x_2}+\frac{\partial\left(-\frac{i}{c}E_z\right)}{\partial x_4}=\mu_0 J_3$$

Din legea fluxului electric, deducem : $\frac{\partial(\varepsilon_0 E_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\varepsilon_0 E_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\varepsilon_0 E_z)}{\partial z}=\rho$ care în spațiul Min -

kovski , se scrie : $\frac{\partial\left(\frac{i}{c}E_x\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(\frac{i}{c}E_y\right)}{\partial x_2}+\frac{\partial\left(\frac{i}{c}E_z\right)}{\partial x_3}-ic\mu_0\rho=\mu_0 J_4$.

Rezultă ecuația cuadridimensională $\frac{1}{\mu_0}\sum_\mu\frac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial x_\mu}=J_\nu$ în care $\psi_{\mu\nu}$ reprezintă ***cuadritensorul câmp electromagnetic*** cu componenetele

$$\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z \\ \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}$$

*

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PARTEA A DOUA

PROBLEME DIVERSE

APLICAȚII ALE UNOR EXTINDERI TEORETICE.

I- ENUNȚURI

1. Să se stabilească condiția de olonomie pentru o formă Pfaff de ordinul I cu trei variabile.

2. Scrieți expresia lucrului mecanic elementar al unui punct material de masă *m*, în câmp gravitațional și specificați parametrul intensiv, respectiv cel extensiv.

3. Știind că puterea transferată asupra unui punct material $P=F\,v$ să se scrie două expresii ce definesc lucrul mecanic elementar ca produs al unui parametru intensiv prin variația unui parametru extensiv.

4. Într-o incintă transparentă și izolată adiabatic, se află o bucată de parafină care se înmoaie sub incidența luminii solare. Precizați coordonatele generalizate a căror variație a determinat schimbarea stării parafinei.

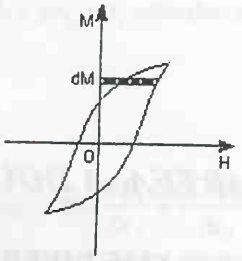
5. Să se deducă expresia lucrului forțelor electrice $dL = V\vec{E}d\vec{D}$ în care vectorul $\vec{E}$ este intensitatea câmpului electric iar vectorul $\vec{D}$ inducția electrică pornind de la expresia lucrului forțelor electrice la încărcare unui condensator plan $dL = Udq$ în care *U este tensiunea între plăci*, iar *dq creșterea infinitezimală a sarcinii.*

6. Pornind de la expresia inductanței *L* a unui solenoid cu *n* spire pe metru $L = \mu n^2 V$, a intensității *H* a câmpului magnetic axial generat de un curent cu intensitatea *I* ce parcurge solenoidul $H = nI$ și a lucrului efectuat la variația *dI* a curentului $dL = LIdI$,deduceți expresia lucrului forțelor magnetice. $dL = V\vec{H}d\vec{B}$

7. Într-o incintă izolată adiabatic ce conține o soluție de sulfat de cupru se introduce o bucată de zinc. După un anumit timp se constată eroziunea zincului, deci modificarea stării inițiale. Precizați cu ce tip de proces ne confruntăm.

8. Dependența magnetizării *M* de câmpul magnetic *H* într-o substanță feromagnetică este reprezentată pe diagrama *(H, M)* prin ***curba de histerezis*** din figură.Precizați valoarea lucrului mecanic efectuat de unitatea de volum din miezul unui solenoid lung la remagnetizarea lui dublă, cunoscând aria *S* cuprinsă în curba de histerezis a miezului magnetic.

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



9. În punctul critic *(pc,Vc,Tc)* volumele specifice ale lichidului şi gazului devin egale

$$V_l = V_g = V_c$$

Exprimaţi parametrii critici ai unui gaz Van der Waals în funcţie de constantele *a* şi *b* ale gazului respectiv şi calculaţi ***coeficientul critic*** $s = \frac{RT_c}{p_c V_c}$.

10. Să se arate că în cazul când se neglijează variaţia volumului la magnetizare pentru o substanţă magnetică omogenă, avem $c_H = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$.

În această relaţie, M reprezintă magnetizarea,H – intensitatea câmpului magnetic, c_H căldura specifică la câmp magnetic constant, iar u energia internă a unităţii de volum.

11. Să se deducă ecuaţia adiabatei unei substanţe paramagnetice ideale.

12. Să se stabilească expresia lucrului mecanic efectuat la magnetizarea izotermă a unui corp paramagnetic pentru care magnetizaţia $\vec{M}$ satisface legea lui Curie $\vec{M} = \frac{a\vec{H}}{T}$ unde $\vec{H}$ este intensitatea câmpului magnetic iar ***a, constanta Curie.***

13. Să se determine lucrul efectuat de un câmp electric pentru a modifica polarizarea electrică a unui dielectric.

14. Se asimilează radiaţia termică cu un gaz ideal. Cunoscând densitatea de energie internă $u=\sigma T^4$ şi presiunea radiaţiei $p = \frac{u}{3}$, să se scrie ecuaţia transformării adiabatice pentru acest sistem.

15. Să se calculeze lucrul mecanic şi căldura schimbate cu exteriorul de către radiaţia termică într-o destindere izotermă când volumul variază de la V_1 la V_2.

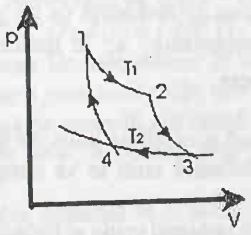
16. Arătaţi că pentru substanţele paramagnetice care se supun legii lui Curie $\chi = \frac{C}{T}$, - χ fiind susceptivitatea magnetică, iar C constanta lui Curie- energia internă nu depinde de magnetizarea M (sau de câmpul magnetic H).

17. Să se calculeze variaţia energiei libere şi a entalpiei libere pentru un gaz perfect pornind de la relaţiile (2.166) şi (2.176)

18. Să se calculeze pentru un gaz perfect variaţia entalpiei libere într-un proces izoterm, în funcţie de volumul iniţial V_1 şi de cel final, V_2.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

19. Să se demonstreze egalitatea lui Clausius,considerând un ciclu constant în care se ia drept substanță de lucru radiația termică, pentru care densitatea de energie internă este $u = \sigma T^4$ $(\sigma > 0, const.)$, iar presiunea radiației este $p = \frac{u}{3}$.



20. Arătați că dilatarea adiabatică liberă a unui gaz de la volumul V la $V+dV$ $(dV>0)$ și trecerea adiabatică lentă a gazului din starea cu presiunea p în cea cu presiunea $p+dp$ $(dp<0)$, menținând mereu presiunea constantă, (proces Joule-Thomson) sunt procese ireversibile.

21. Ecuația fundamentală a termodinamicii pentru o substanță paramagnetică al cărei volum nu variază prin magnatizare, se scrie $Tds = du - HdM$, s și u fiind entropia, respectiv energia internă a unității de volum, H intensitatea câmpului magnetic, iar M-magnetizarea. Să se arate că dacă energia internă u nu depinde de H ci numai de T, atunci magnetizarea M depinde de raportul H/T.

22. Experiențele au stabilit că untr-un anumit domeniu de temperaturi magnetizarea M a unei substanțe paramagnetice depinde doar de raportul H/T.

a) Să se arate că în acest caz energia internă a unității de volum u, nu depinde de magnetizare
b) Să se găsească dependența variației de entropie Δs a unității de volum de raportul H/T.

23. Să se calculeze temperatura finală T'la care ajunge o substanță paramagnetică plasată într-un câmp magnetic H, care aflându-se inițial la temperatura T este demagnetizată adiabatic până la anularea completă a câmpului.Se cunosc: susceptibilitatea molară χ și căldura specifică la câmp magnetic constant $c_H = const.T^{-2}$.

24. În apropierea punctului triplu, curba de echilibru în diagramă (p,T) între fazele solidă și gazoasă, are de obicei o înclinare mai mare către axa temperaturii decât curba de echilibru între fazele lichidă și gazoasă.Explicați această comportare.

25. Să se deducă pentru o transformare de fază de speța întâi ecuația diferențială a curbei de echilibru a celor două faze - ecuația Clapeyron $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)}$ - în care λ este căldura latentă molară, v- volumul molar iar cu indicii 1 și 2 s-au notat cele două faze.

26. Pentru o temperatură a sistemului suficient de depărtată față de temperatura critică, presiunea vaporilor saturanți este suficient de mică. Notând cu λ căldura latentă de formare a vaporilor, constantă în întreg domeniul de temperaturi să se deducă relația ce exprimă presiunea vaporilor saturanți ai unui lichid ca funcție de temperatură.

27. Să se determine temperatura punctului triplu al amoniacului dacă se știe că presiunea vaporilor lui rezultă din relațiile :

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\ln p = 3064{,}32 - \frac{475342}{T}\frac{N}{m^2}$ şi $\ln p = 2592{,}17 - \frac{407379}{T}\frac{N}{m^2}$, prima pentru echilibrul solid – vapori şi a doua pentru echilibrul lichid – vapori.

28. Presupunând că vaporii de amoniac se comportă ca un gaz ideal să se determine căldura latentă de sublimare, λ_s şi cea de vaporizare, λ_v, în ipoteza că se cunoaşte dependenţa de temperatură $lnp=f(T)$ în ambele procese .

29. Într-un tub de sticlă este introdusă o cantitate mică de lichid. Din tub este scos apoi tot aerul şi tubul se sigilează. Să se stabilească cum se va comporta meniscul faţă de creşterea temperaturii, dacă :

a) volumul tubului, V întrece cu mult volumul critic al lichidului, $(V >> V_c)$;

b) $V << V_c$;

c) $V=V_c$.

30. La temperatura de $0K$ pot exista la echilibru fazele solidă şi lichidă ale He^4,densitatea solidului fiind mai mare decât cea a lichidului.Stabiliţi alura pantei $\frac{dp}{dT}$ a curbei de echilibru pentru cele două faze la $0K$.

31. Arătaţi că pentru $T \to 0K$ susceptibilitatea magnetică satisface condiţia: $lim\frac{\partial \chi_p}{\partial T} \to 0$.

32. Arătaţi că prin creşterea diferenţei de potenţial φ pe armăturile unui condensator electric se produce fenomenul de electrostricţiune care se evidenţiază printr-o contracţie a volumului dielectricului.

33. Arătaţi că prin creşterea intensităţii câmpului magnetic H_m se produce fenomenul de magnetostricţiune concretizat prin variaţia volumului mediului aflat în câmpul magnetic.

34. Să se arate că $\lim_{T\to 0K}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{H_m,p} = 0$ unde M este magnetizaţia iar H_m este intensitatea câmpului magnetic.

35. Un lichid aflat la temperatura T_1 şi presiunea p_0 este comprimat la temperatură constantă. Să se determine presiunea la care lichidul se solidifică dacă la presiunea atmosferică p_0 topirea se produce la temperatura T_0. Se cunosc: căldura latentă de topire λ şi densităţile ρ_l şi ρ_s pentru stările lichidă şi solidă în condiţii normale. Se presupune că presiunea de echilibru este o funcţie liniară de temperatură.

36. Să se determine căldura latentă λ corespunzătoare temperaturii T cunoscând temperatura critică T_c de trecere a unui metal din starea normală în starea supraconductoare şi câmpul magnetic critic H_0 la $0K$.

37. Cunoscând temperatura critică T_c la care un metal trece din starea normală în starea supraconductoare, să se determine temperatura T' la care căldura specifică nu se modifică în această tranziţie de fază.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

38. Presupunând că la temperatura T' entropia stării supraconductoare $s_s=0$, să se determine entropia stării normale pentru aceeaşi temperatură şi variaţia $c_n - c_s$ a căldurilor specifice pentru $T=T_c$ cunoscând valoarea H_0 a intensităţii câmpului magnetic critic la $0K$.

39. Tensiunea electromotoare a unui termocuplu de cupru – constantan se exprimă prin relaţia:

$$\mathcal{E} = 3{,}8 \cdot 10^{-5}\,(T_2-T_1)+4{,}1\cdot 10^{-8}\,(T_2^2 - T_1^2)$$

Din această expresie rezultă tensiunea electromotoare în volţi presupunând că temperatura joncţiunii reci este $T_1 = 273K$, iar cea a joncţiunii calde este menţinută sub $400K$. Estimaţi ce cantitate de energie trebuie transferată pe secundă sub formă de căldură Peltier pentru a menţine joncţiunea caldă la temperatura de $300K$, la trecerea unui curent $i=10mA$.

40. Se consideră un condensator plan conectat la o sursă de tensiune constantă având aria armăturilor egală cu A iar distanţa între armături egală cu d. Între armături se introduce un dielectric cu permitivitatea ε depinzând de temperatură după legea $\varepsilon = aT^2 + bT + c$; a,b şi c fiind constante. Stabiliţi:

a) expresia energiei libere a sistemului în funcţie de temperatură şi de intensitatea E a câmpului electric dintre armături;
b) expresia energiei interne U şi entropiei S în funcţie de temperatură şi de intensitatea câmpului electric între armături;
c) căldura degajată în condensator, la o creştere cuasistaţionară a diferenţei de potenţial aplicată armăturilor de la 0 la φ.

41. Arătaţi că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca diferenţiala sursei de entropie $d\gamma_s$ să admită un factor integrant este ca să fie îndeplinite relaţiile de reciprocitate ale lui Onsager.

42. Se consideră o cavitate cubică de latură a în care se formează unde staţionare. Deduceţi expresia densităţii spectralo-volumice a numărului de unde staţionare

$$\sigma_\nu = \lim_{\Delta\nu\to 0} \frac{\Delta\Sigma(\nu,\nu+\Delta\nu)}{a^3\Delta\nu}$$

în care $\Delta\Sigma(\nu,\nu+\Delta\nu)$ reprezintă numărul undelor staţionare distincte, de frecvenţe cuprinse între ν şi $\nu+\Delta\nu$ care pot exista în cavitate.

43. Se consideră un corp paramagnetic caracterizat de o magnetizaţie totală M. Demonstraţi că în cazul acestui sistem fizic există relaţia: $\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{T,p} = -\mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)$.

44. Precizaţi efectul produs de polarizarea unităţii de volum a unui dielectric atunci când se neglijează variaţia volumului la temperatură constantă şi particularizaţi pentru cazul în care,

$$\varepsilon(T) = 1 + \frac{ct.}{T}.$$

45. Se consideră un sistem continuu de volum constant ce conţine un singur component izotrop şi în interiorul căruia se creează un gradient de temperatură. Neglijând celelalte fenomene de transport în afara conducţiei termice, se cere:

a) să se scrie expresia sursei de entropie şi ecuaţia fenomenologică în acest caz;
b) să se arate că în starea staţionară este valabil principiul producţiei minime de entropie;
c) să se verifice prin calcul direct că în general $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d_i S}{dt}\right) \le 0$, în care $\left(\frac{d_i S}{dt}\right)$ este producţia minimă de entropie $\frac{d_i S}{dt} = \int_V \gamma_S dV$.

BCU / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

46. În cazul unei substanțe paramagnetice ideale, magnetizația variază cu temperatura în conformitate cu legea lui Curie: $M = \frac{CH}{T}$. Arătați că în condițiile în care câmpul magnetic variază, iar sistemul este izolat adiabatic, $dT = \mu_0 \left(\frac{CH}{c_H T} \right) dH$, în care c_H este capacitatea calorică a unității de volum.

47. Susceptibilitatea χ a unei substanțe paramagnetice este de forma: $\chi = \frac{C}{T}$, unde C este o constantă pozitivă. Determinați căldura schimbată de unitatea de volum a substanței cu mediul extern când temperatura se menține la valoarea T_1 iar intensitatea câmpului magnetic crește de la *0* la *H*. Se neglijează variația volumului.

48. Determinați variația temperaturii într-un proces de demagnetizare adiabatică a unei substanțe paramagnetice pentru care energia internă a unității de volum u depinde de temperatură după legea $u = \sigma T^4$, în care σ este o constantă. Se neglijează variația volumului.

49. Arătați că energia internă a unității de volum pentru o substanță a cărei magnetizație depinde de raportul H/T, este independentă de M. Se neglijează variația volumului. Stabiliți expresia entropiei.

50. Se consideră un gaz molecular, plasat într-un câmp electric $\vec{E}$. Se cunoaște numărul n de molecule din unitatea de volum. Fiecare moleculă are un moment electric dipolar p. Sistemul este izolat față de alte acțiuni externe. Calculați polarizarea electrică P a gazului, în funcție de temperatură

51. Se consideră un gaz rarefiat aflat în echilibru termodinamic la temperatura T. Fiecare atom al gazului emite o singură linie spectrală cu frecvența ν_0 în sistemul de coordonate legat de atom. Masa unui atom – gram de gaz este M. Se cere:

a) Să se găsească repartiția spectrală $I(\nu)$ a luminii emise de gaz;
b) Definind *lărgimea Doppler a liniei spectrale* $\Delta\nu_D$ ca intervalul de frecvențe pentru care $I(\nu)$ este egală cu jumătate din valoarea sa maximă, stabiliți expresia acestei lărgimi.
c) Calculați $\Delta\nu_D$ a liniei $\nu_0 = 6328\ nm$ emise de neon la $T = 300K$, cunoscând $\mu_{Ne} = 20Kg \cdot Kmol^{-1}$

52. Un gaz ideal ce conține n molecule de masă m în unitatea de volum, este închis la temperatura T într-un vas care are pe unul din pereți un mic orificiu. Care este viteza medie cu care ies moleculele în direcția axei x prin orificiu?

53. Se definește drumul liber mediu între două ciocniri ale moleculelor, $\bar{\lambda}$ ca distanța medie parcursă de o moleculă între două ciocniri succesive cu alte molecule. Calculați numărul mediu de ciocniri $\bar{N}$ ale moleculelor unui gaz în unitatea de timp cunoscând $\bar{\lambda} = 4 \cdot 10^{-6}\ m$ și viteza pătratică medie $\sqrt{\overline{v^2}} = 900 m \cdot s^{-1}$.

54. Se consideră că nivelele energetice E cu gradele de degenerare g_i sunt populate în conformitate cu repartiția la echilibru în statistica Maxwell – Boltzmann:

$$N_i^0 = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} \quad , \quad Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i} \quad , \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Scrieți expresiile următoarelor mărimi termodinamice: energia internă, capacitatea calorică la volum constant, energia liberă, presiunea, entalpia și entalpia liberă. Se va folosi pentru probabilitatea termodinamică în statistica Maxwell – Boltzmann, expresia: $P = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$.

55. Determinați procentul q de molecule pentru care vitezele nu diferă cu mai mult de *10%* de vitezele *medie, "cea mai probabilă" și "pătratică medie"*

56. Precizați funcția de partiție, energia internă, entropia și capacitatea calorică la volum constant pentru un gaz molecular în care fiecare moleculă are două nivele de energie electronice de aceeași degenerescență.

57. Determinați *probabilitățile de ocupare* a nivelelor energetice, funcția de partiție Z și energia internă U pentru un sistem molecular ce conține N molecule în care fiecare moleculă are două nivele de energie E_1 și E_2 ($E_1 < E_2$) de ponderi statistice g_1 și respectiv g_2. Se presupune că sistemul este în echilibru cu un termostat la temperatura T și ascultă de statistica Maxwell – Boltzmann. Aplicație: $N = 6{,}023 \cdot 10^{26}\, Kmol^{-1}$; $E_2 - E_1 = 2{,}21 \cdot 10^{-21} J$; $g_1 = 5$; $g_2 = 10$; $T = 300K$; $K = 1{,}38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$.

58. Să considerăm un sistem molecular în care fiecare moleculă are trei nivele de energie E_1, E_2 și E_3 distanțate în scara energiilor la *1eV* unul de altul și cu ponderile statistice $g_1 = 1$; $g_2 = 2$; $g_3 = 1$. Sistemul se află la temperatura de *300K*. Să se determine capacitatea calorică la volum constant C_v pentru acest sistem molecular.

59. Se consideră o sarcină punctiformă în originea O a unui referențial cartezian: problema presupune simetria sferică și peste tot în afara punctului O densitatea de sarcină nulă.

a) deduceți potențialul electric creat de această sarcină pornind de la ecuația Poisson și precizați expresia câmpului electric corespunzător;

b) rezolvați ecuația Poisson modificată: $\Delta\varphi + A = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ *sau* $\Delta\varphi - \frac{\varphi}{a^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ unde A și a sunt două constante (se va considera $\rho = 0$). Arătați apoi că dacă se impune $\varphi = 0$ la infinit, o singură soluție este convenabilă.

60. Să se verifice că un câmp magnetostatic uniform cu inducția $\vec{B}_0$ admite potențialul vector $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}_0 \times \vec{r}$.

61. Se consideră o distribuție de sarcină și curenți care definește potențialele A și φ. Aceste potențiale satisfac condiția de etalon (Lorentz): $\nabla\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$. Exprimați câmpurile electric și magnetic $\vec{E}$ și $\vec{B}$ cu ajutorul ***potențialului Hertz*** $\vec{\Pi}$ definit de relația: $\vec{A} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}$.

62. Precizați expresile potențialului vector al câmpului magnetic definit prin inducția magnetică:

$$B_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi R^2}, r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, r > R \end{cases}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în cazul unui cilindru infinit de rază R parcurs de un curent cu intensitatea I uniform distribuit în secțiune. Axul cilindrului coincide cu axa OZ a unui triedru cartezian; permeabilitatea conductorului cilindric este μ,conductorul este situat în vid, iar r, ψ și z sunt coordonate cilindrice.

63. Precizați liniile de forță ale câmpului magnetic creat de o distribuție de curenți de forma $i_x=i_y=0$; $i_z=i_z(x,y)$.

64. Pornind de la expresia potențialului vector $\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \vec{j}\frac{dV}{r}$ să se deducă expresia matematică a legii Biot – Savart – Laplace care exprimă dependența inducției magnetice $\vec{B}$ de densitatea de curent $\vec{j}$.

65. Exprimați energia câmpului magnetic sub forma energiei de interacțiune a curenților elementari.

66. Pornind de la expresia potențialului vector determinat de un curent constant I, demonstrați că inducția magnetică $\vec{B}$ produsă în punctul P(x,y,0) de curentul I din elementul de conductor dl este dat de ecuația lui Laplace.

67.

1). Să se determine potențialele undei progresive plane EM în vid, în absența sarcinilor și curenților. Se verifică condiția de etalonare Lorentz. Să se scrie ecuația D'Alembert pentru potențialul vector luând axa Ox ca direcție de propagare.

2). Să se determine potențialul scalar φ_0.Să se determine $\vec{E}$ și $\vec{B}$.Să se arate că se regăsește structura undei plane progresive.

68. Se consideră o sferă de rază a care posedă o magnetizație $\vec{M}_0$ uniformă.

1°. Să se calculeze potențialul vector $\vec{A}$ corespunzător în interiorul și în exteriorul sferei;

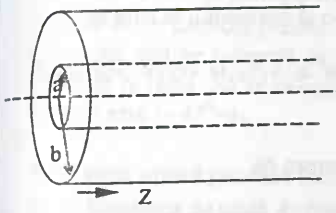
2°. Să se calculeze inducția $\vec{B}$ a câmpului magnetic corespunzător.

*69.*Se consideră o bară de forma unui cilindru de rază a și cu lungime foarte mare. Bara este magnetizată uniform cu vectorul $\vec{M}$ perpendicular pe axa sa. Să se calculeze potențialul vector $\vec{A}$ în interiorul și în exteriorul barei. Să se deducă câmpul magnetic de inducție $\vec{B}$ în interiorul și în exteriorul barei.

70. O bară foarte lungă de secțiune circulară cu raza a are o magnetizare paralelă cu axa sa (considerată axa Oz). Magnetizarea este de forma $\vec{M}=\frac{r}{a}M_0\vec{l}_z$. Să se calculeze densitățile de curenți echivalenți acestei magnetizări.Să se determine inducția magnetică $\vec{B}$ în interiorul și în exteriorul barei.

*71.*Un cablu coaxial este constituit dintr-un conductor cilindric de rază a și o anvelopă metalică tot cilindrică de rază b. O secțiune prin acest cablu se repereză prin cota sa z. Conductorul

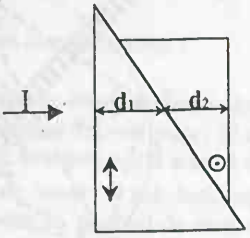
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



interior este parcurs de un curent $I(z, t)=I(z)e^{j\omega t}$ unde $I(z)$ este o funcţie care se va preciza.Într-un plan $z=const.$ câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt funcţii de (z,r,t) cu r – distanţa unui punct din spaţiu faţă de axa comună; ele sunt respectiv radiale şi ortoradiale, (vom desemna prin E şi B singurele componente nenule ale lui $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ în coordonate cilindrice). Spaţiul se limitează $a \le r \le b$.

1. Să se calculeze $B(r, z, t)$ în funcţie de $I(z, t)$.
2. Să se deducă E în regimul variabil considerat.
3. Să se arate că $I(z) = I_0 e^{-jkz}$ şi să se deducă forma lui k. Să se interpreteze $I(z, t)$ în regim de undă.
4. Să se calculeze vectorul Poynting şi să se deducă puterea medie transportată prin cablu, precum şi impedanţa caracteristică cablului.

72. Se consideră un compensator Babinet alcătuit din două prisme drepte, tăiate la un unghi α la vârf astfel încât cele două prisme să aibă axele optice perpendiculare una pe cealaltă, aşa cum se observă în figură.



Cunoscând grosimea d_1 a primei pene, precizaţi pentru ce grosime d_2 a celei de a doua pene compensatorul produce o diferenţă de $\frac{2\pi}{3}$ radiani între fazele razelor ordinară şi extraordinară ale radiaţiei cu lungimea de undă $\lambda = 500\ nm$. în vid. Se cunosc indicii de refracţie $n_0 = 1,544$ şi $n_e = 1,553$.

73.Se consideră un dispozitiv interferenţial de tip Young.În dreptul uneia din sursele secundare se introduce o lamă dintr-un material birefringent, de tip semiundă pentru radiaţia λ produsă de sursă .În drumul celui de al doilea fascicul se introduce o lamă de sticlă convenabil aleasă astfel încât să fie compensată diferenţa de drum. Comentaţi figura obţinută pe ecran.

74. Într-un experiment cu un interferometru Michelson poziţia defazajului zero este dată de o franjă albă. Dacă sursa de lumină albă este înlocuită de o lampă cu mercur prevăzută cu un filtru verde realizat pentru $\lambda = 546,1$ nm. după trecerea prin punctul de zero a aproximativ 1000 de franje,sistemul de franje este dificil de observat. Calculaţi lărgimea liniei spectrale şi timpul de coerenţă τ_c al sursei.

75.O biprismă Fresnel este alcătuită din două prisme de sticlă cu indicele de refracţie $n=1,5$ şi unghi $\alpha=30^0$ lipite la bază. Distanţa de la ecran la sursă este $L=100cm$, iar distanţa între surse $d=3,5mm$. Lungimea de undă a radiaţiei monocromatice este $\lambda=700nm$. Se cere:

a) distanţa l de la sursa S la biprismă;
b) interfranja.

76. Se efectuează o experienţă cu biprisma Fresnel. Să se arate că:

a) $d = 2(n-1) \cdot A \cdot l$ unde d este distanţa între sursele virtuale S_1şi S_2 iar l distanţa de la dreapta care le uneşte la biprismă, n indicele de refracţie al prismelor iar A unghiul acestora.

BUCHAREST UNIVERSITY LIBRARY

b) $x_k = k\lambda\dfrac{L}{2l(n-1)A}$, unde x_k este distanța față de axul optic al sistemului la care se formează maximul de interferență de ordinul k, iar L distanța de la S_1S_2 la ecran. Aplicație numerică: $A=3'$; $l=0,5m$; $L=2m$; $n=1,52$; $\lambda=561,0nm$ iar $k=5$.

77. Se realizează o experiență cu oglinzile Fresnel. Să se demonstreze că:

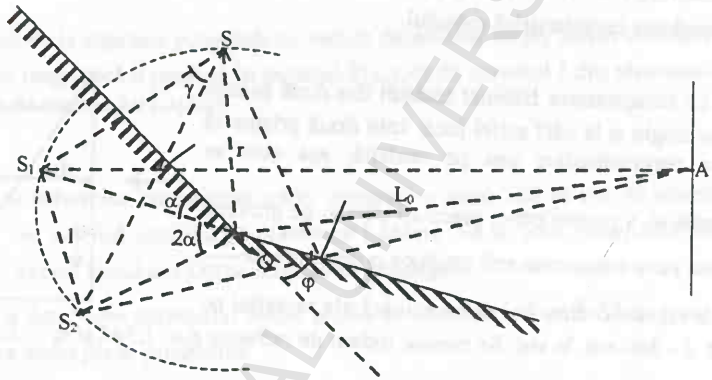
a) $\angle S_1OS_2=2\alpha$ unde α este unghiul dintre oglinzi;

b) $l=2\alpha r$, unde l este distanța dintre izvoarele S_1 și S_2 iar $r = OS$;

c) interfranja $i = \dfrac{L_0+r}{2\alpha r}\lambda$, unde i este interfranja iar L_0 muchia glinzilor la ecran;

d) să se calculeze unghiul α dintre oglinzi,dacă $i=1mm$, $L_0=1m$, $r = 10\ cm$ și $\lambda=589,0$ nm.

e) Să se calculeze distanța a dintre centrul figurii de interferență și a șasea franjă luminoasă.



78. Se realizează o experiență cu oglinzile Fresnel în care se utilizează lumina albă. Se cere:

a) Să se analizeze succesiunea culorilor în figura de interferență;

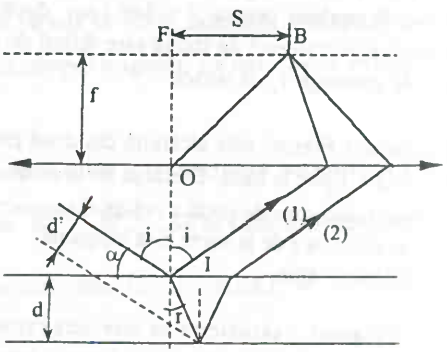
b) Ordinul maxim de interferență de la care figura de interferență nu mai este vizibilă având în vedere că lungimea intervalului spectral pentru lumina albă este $\Delta\lambda=1000Å$.

79. Un fascicul paralel de radiații electromagnetice monocromatice cu lungimea de undă λ=550nm. cade pe o lamă cu fețe plan-paralele făcând un unghi de 30^0 cu planul acesteia. Cunoscând grosimea lamei $d=0,1nm$.și indicele ei de refracție $n=1,5$ se cer:

a) diferența de drum dintre razele reflectate pe cele două fețe;

b) deplasarea razei emergente ce iese din lamă;

c) distanța focală a unei lentile convergente care așezată perpendicular pe normala în punctul de incidență,produce în planul său focal un maxim de interferență la distanța $S=60mm$ de axa optică principală.



80. O lamă cu fețe plan-paralele de grosime $e = 0,2mm$ și indice de refracție $n = 1,5$ este iluminată de un fascicul paralel de lumină monocromatică de lungime de undă $\lambda=600nm$. Razele reflectate cad pe o lentilă de distanță focală $f=30$ *cm.*, a cărei axă optică face un unghi i_0 cu normala la lamă. Să se calculeze interfranja dacă unghiul de incidență medie a fasciculului de lumină este $i=45^0=i_0$.

81. O pană optică produce interferența localizată pe suprafața acesteia în lumină monocromatică cu lungimea de undă $\lambda=600nm$. La incidența normală, interfranja are valoarea $i=6mm$. Cunoscând indicele de refracție al lamei $n=1,5$ se cer:

a) câte franje se formează pe o lungime a penei egală cu $d=15cm$.;
b) unghiul penei.

82. Se consideră o pană de aer cu una din fețe fixă, iar cealaltă se poate deplasa paralel cu ea însăși depărtându-se de prima. Pana este iluminată cu lumină monocromatică având λ=5000Å (*500nm*).

a) Cum se poate măsura deplasarea feței mobile ?
b) Care este deplasarea minimă ce se poate măsura într-o astfel de experiență ?
c) Ce se întâmplă dacă se variază unghiul penei și care este unghiul minim ce poate fi pus în evidență ?
d) Cum se poate măsura cu ajutorul penei optice planeitatea unei suprafețe ?

83. Cazul de interferență într-o lamă subțire, numit inelele lui Newton, se observă atunci când o lentilă plan – convexă , având raza de curbura mare, R este în contact într-un punct O cu suprafață plană a unei plăci de sticlă. Între lentilă și placa de sticlă se frmează astfel o lamă de aer. Se iluminează lentila cu lumină monocromatică de lungime de undă λ sub incidență normală. În lumina reflectată se observă inele luminoase și întunecate, în punctul de contact se vede un inel întunecat.
Se cere:

a) Să se explice apariția inelelor luminoase și întunecate;
b) Să se determine raza celui de al m-lea inel întunecat;
c) Să se determine raza celui de al n-lea inel întunecat;
d) Să se explice de ce în punctul de contact apare un inel întunecat;
e) Dacă distanța dintre al 2-lea și al 3-lea inel luminos este de 1mm. Să se determine distanța dintre cel de al 9-lea și al 10-lea inel întunecat.

84. Fețele unei pene de sticlă ($n=1,5$), formează între ele un unghi $\alpha=0,1'$. Pe pană cade normal un fascicul de lumină monocromatică de lungime de undă $\lambda=0,5\mu$.

a) Să se afle dacă în punctul corespunzător unei grosimi $d=2mm$. este lumină sau întuneric.
b) Să se calculeze interfranja.

85. O lentilă plan – convexă, de rază de curbură R e sprijinită orizontal, aflându-se la o mică distanță de suprafața de bază superioară plană a unui cilindru de oțel. Raza inferioară a cilindrului e fixată rigid; înălțimea lui este $h_0=5cm$. Folosindu-se lumină incidentă normal, de lungime de undă $\lambda=600nm$., se produc inelele lui Newton între lentilă și baza superioară a cilindrului. Se cere:

a). Să se demonstreze că între razele r_p și r_q a două inele există relația:

$$r_p^2 - r_q^2 = R(p-q)\lambda$$

Dacă temperatura cilindrului crește cu $\Delta t=25^0$, se observă o deplasare de 50 de inele.
b). Să se determine coeficientul de dilatare liniară a cilindrului.

86. Se consideră o celulă electrică compusă din doi electrozi între care se află nitrobenzen. La aplicarea nitrobenzenului, se comportă ca un mediu anizotrop uniax cu axa optică pe direcția câmpului electric iar diferența indicilor de refracție este dată relația :

$$n_e = n_0 = k\lambda E^2$$

unde λ este lungimea de undă a radiației în vid, iar k este o constantă care pentru nitrobenzen are valoarea $k = 4 \cdot 10^{-10}\ V^{-2}cm$. Celula Kerr este plasată între doi polarizori încrucișați a căror axă de transmisie face 45^0 cu direcția câmpului electric E. Știind că lungimea celulei este $l = 5\ cm.$, să se calculeze fracțiunea din lumina incidentă care trece prin dispozitivul de mai sus. Se mai cunosc: distanța dintre electrozi de $7\ mm.$, tensiunea pe electrozi egală cu $10000\ V$ iar lungimea de undă $\lambda = 500nm$.

87. Arătați că în cazul mediilor izotrope și omogene câmpul electromagnetic se poate exprima cu ajutorul unei singure funcții vectoriale $\vec{Z}(x,y,z,t)$ (vectorul Hertz) și stabiliți ecuația pe care o satisface vectorul $\vec{Z}$.

88. Calculați câmpul electromagnetic generat de un dipol electric cu momentul electric dipolar $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ aflat în originea sistemului de coordonate și având momentul dirijat în lungul axei Oz.

89. Stabiliți relațiile de transformare a potențialelor vector $\vec{A}$ și scalar φ, la trecerea de la un sistem de referință inerțial la altul.

90. Stabiliți relațiile de transformare ale vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$ la trecerea de la inerțialul fix S la referențialul inerțial mobil S′ și invers.

91. Stabiliți componenetele cuadrivectorului potențial $\vec{\Phi}$ și precizați relațiile de transformare ale acestor componente prin trecerea de la S la S′ :

92. Deduceți expresia legii efectului Doppler relativist folosind cuadrivectorul numărului de undă $\vec{K}_\nu$.

93. Pornind de la transformările Lorentz aplicate vectorilor câmp electric și magnetic, dovediți invarianța expresiilor $\vec{E}\cdot\vec{B}$ și $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$ la schimbarea referențialului.

94. Exprimați invariantul $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$ cu ajutorul tensorului câmp electromagnetic $\psi_{\mu\nu}$.

95. Pornind de la cuadritensorul excitație $\psi_{\mu\nu}$ deduceți relațiile de transformare ale vectorilor $\vec{H},\vec{D}$ la schimbarea referențialului inerțial.

95. Arătați că expresia $\vec{E}\vec{D} - \vec{H}\vec{B}$ este un invariant și stabiliți valoarea acestui invariant în funcție de tensorii câmp electromagnetic $\psi_{\mu\nu}$ și excitație $\Theta_{\mu\nu}$.

*

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

II – SOLUȚII, INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Forma Pfaff $X_1dx_1 + X_2dx_2 + X_3dx_3$ este *olonomă* dacă există funcția $\mu(x_1, x_2, x_3)$ astfel ca $\mu(X_1dx_1 + X_2dx_2 + X_3dx_3) = d\phi(x_1, x_2, x_3)$ unde funcția $\phi(x_1, x_2, x_3)$ îndeplinește condițiile

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i} \quad i,j=1,2,3. \text{ adică,}$$

$$X_2\frac{\partial\mu}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial X_2}{\partial x_1} = X_1\frac{\partial\mu}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial X_1}{\partial x_2}$$

$$X_3\frac{\partial\mu}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial X_3}{\partial x_2} = X_2\frac{\partial\mu}{\partial x_3} + \mu\frac{\partial X_2}{\partial x_3}$$

$$X_1\frac{\partial\mu}{\partial x_3} + \mu\frac{\partial X_1}{\partial x_3} = X_3\frac{\partial\mu}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial X_3}{\partial x_1}$$

Se înmulțește prima ecuație cu X_3, a doua cu X_2 și a treia cu X_1. Rezultă,

$$X_1\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) + X_2\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) + X_3\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) = 0$$

și notând $\vec{Y} = X_1\vec{\ell}_{x_1} + X_2\vec{\ell}_{x_2} + X_3\vec{\ell}_{x_3}$, condiția obținută, se scrie vectorial sub forma

$$\vec{Y}\cdot(\nabla\times\vec{Y}) = 0$$

*

2. $dL = mgdh$ Coordonata generalizată h este parametru intensiv, iar forța generalizată mg este parametru extensiv.

*

3. $dL = Pdl = F\frac{dl}{dt}dt = Fdl = m\cdot a\cdot dl$, în care forța ma este parametrul intensiv, iar variația dl a coordonatei parametrul extensiv. O altă expresie se obține scriind că

$$dL = P\cdot dl = m\frac{dv}{dt}dt = v\cdot d(m\cdot v) = v\cdot dp$$

În această expresie, v (viteza) este parametrul intensiv, iar coordonata generalizată dp (variația impulsului) este parametrul extensiv.

*

4. Schimbarea stării bucății de parafină a fost determinată de componentele vectorilor $\vec{B}$ și $\vec{D}$ ai undei luminoase care sunt tocmai coordonatele generalizate cerute.

*

5. Notând cu A aria armăturilor și cu d distanța între ele, avem:

$$U = E\cdot d,\ dq = A\cdot dD \text{ și } dL = A\cdot d\cdot E\cdot dD$$

și întrucât volumul dielectricului este $U = A\cdot d$, rezultă $dL = V\cdot E\cdot dD = V\cdot\vec{E}\cdot d\vec{D}$.

*

6. $dL = L\cdot|d| = \mu\cdot n^2\cdot V\cdot|d| = V\cdot n\cdot\mu\cdot n\cdot dl = V\cdot H\cdot dB = V\cdot\vec{H}\cdot d\vec{B}$

*

7. Starea inițială a sistemului nu este o stare de echilibru și nici stările intermediare ce se caracterizează prin fluxuri de ioni de zinc ce migrează din metal, în soluție. În ciuda desfășurării lente a procesului, acesta nu poate fi considerat cuasistatic întrucât stările intermediare nu sunt stări de echilibru.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

8. Lucrul elementar de magnetizare a unității de volum este dat de aria haşurată cuprinsă în curba de histerezis: $dL = -HdM$ astfel că lucrul de remagnetizare a unității de volum din mie - zul solenoidului va fi $L = -\oint HdM = -S$ în care integrala se efectuează pe conturul curbei de histerezis.

*

9. Ecuația Van der Waals pentru un mol de gaz real se scrie:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \qquad (1)$$

care ordonată la forma canonică după V devine:

$$V^3 - \left(\frac{RT}{p} + b\right)V^2 + \frac{a}{p}V - \frac{ab}{p} = 0 \qquad (2)$$

În starea critică, această ecuație admite trei rădăcini egale, fiind de forma:

$$(V - V_c)^3 = V^3 - 3V_cV^2 + 3V_c^2V - V_c^3 \qquad (3)$$

care prin indentificare cu (2) scrisă pentru punctul critic, conduce la:

$$3V_c = \frac{RT_c}{p_c} + b; \quad 3V_c^2 = \frac{a}{p_c} \text{ şi } V_c^3 = \frac{ab}{p_c} \qquad (4)$$

Rezolvând sistemul acestor trei ecuații în necunoscutele p_c, V_c, T_c se obțin soluțiile:

$$V_c = 3b;\ p_c = \frac{a}{27b^2} \text{ şi } T_c = \frac{8a}{27Rb} \qquad (5)$$

Cu aceste relații, se obține coeficientul critic pentru ecuația Van der Waals,

$$s = \frac{RT_c}{p_cV_c} = \frac{8}{3} = 2{,}67 \qquad (6)$$

care are aceeaşi valoare pentru toate substanțele. În realitate, valoarea acestui coeficient este mai mare, în medie egală cu *3,7* având valori diferite pentru gaze diferite ceea ce denotă că şi ecuația termică Van der Waals este o ecuație ce descrie cu o anumită aproximație comporta - rea cantitativă a gazului real.

*

10. Conform principiului întâi, $dQ = du - HdM$ în care $dL = HdM$ reprezintă lucrul mecanic la magnetizare. Considerând $u = u(T,H)$ şi $M = M(T,H)$ se obține

$$dQ = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_H\right]dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial H}\right)_T - H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T\right]dH$$

Rezultă $c_H = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_H = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$.

*

11. Vom scrie expresia principiului întâi în două moduri considerând două expresii pentru lucrul mecanic de magnetizare cu neglijarea variației volumului

$$dQ = c_H dT - HdM \text{ şi } dQ = c_H dT + MdH .$$

S-a ținut seama că pentru un material paramagnetic ideal, $\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T = 0$ şi $\left(\frac{\partial u}{\partial H}\right)_T = 0$ iar $\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_M = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_M = c_M$ şi $\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_H = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_H = c_H$ sunt căldurile specifice la magnetizare constantă, respectiv la câmp magnetic constant. Într-un proces adiabatic, $dQ = 0$ şi prin împăr- țirea ultimelor două relații se obține :

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\gamma \frac{dM}{M} = -\frac{dH}{H} \Rightarrow HM^{\gamma} = const.$ $\left(\gamma = \frac{c_H}{c_M}\right)$ sau altfel, din ecuația adiabatei

$$\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a + \gamma \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da = 0$$

În cazul unei substanțe paramagnetice, când $A = -H$ și $a = M$, avem:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_M dH + \gamma \left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_H dM = 0$$

Cum pentru o substanță ideal paramagnetică $M = \chi H = \frac{CH}{T}$, C fiind *constanta Curie*, iar $\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_M = \frac{C}{M}$ și $\left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_H = -\frac{CH}{M^2}$. Ecuația diferențială a adiabatei pentru acest sistem fizic, devine : $\frac{dH}{H} = \gamma \frac{dM}{M}$ care, integrată conduce la ecuația : $HM^{\gamma} = const.$

*

12. Lucrul elementar necesar magnetizării corpului se exprimă prin relația : $\delta L = \mu_0 \vec{H} d\left(V\vec{M}\right)$ în care V este volumul sistemului, iar μ_0 permeabilitatea magnetică a vidului. Rezultă :

$$L = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\mu_0 VT}{C} \vec{M} d\vec{M} = \frac{\mu_0 VT}{2C}\left(M_2^2 - M_1^2\right)$$

cu presupunerea că prin magnetizare, volumul rămâne constant. Dacă magnetizarea este produsă de un câmp magnetic const., $L = \mu_0 VH\left(M_2 - M_1\right)$.

*

13. Lucrul transferat dielectricului de la câmpul electric se exprimă prin:

$$L = \int \vec{E} \cdot d\left(V\vec{P}\right) = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right) V \int_{E_1}^{E_2} \vec{E} \cdot d\vec{E} = \frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right) V}{2}\left(E_2^2 - E_1^2\right)$$

S-a ținut seama de expresia intensității de polarizare $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_\varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right) \cdot \vec{E}$

*

14. Energia internă a radiației termice conținută într-un volum V de sistem, este $U = Vu = V\sigma T^4$
Scriem expresia diferențială a principiului întâi

$$\delta Q = d\left(\sigma VT^4\right) + pdV = \left(\sigma T^4 + \frac{\sigma T^4}{3}\right) dV + 4\sigma VT^3 dT = \frac{4}{3}\sigma T^4 dV + 4\sigma VT^3 dT$$

Pentru o transformare adiabatică $\delta Q = 0$. Se obține ecuația $\frac{dV}{V} + 3\frac{dT}{T} = 0$ echivalentă cu

$$VT^3 = const.$$

*

15. Densitatea volumică a radiației termice este $u = \sigma T^4$ iar presiunea radiației este $p = \frac{u}{3}$.
Energia internă conținută într-un volum V de radiație termică este $U = Vu = \sigma VT^4$.
Din principiul întâi $Q = \Delta U + L$, rezultă pentru o transformare izotermă $\Delta U = \sigma T^4\left(V_2 - V_1\right)$ și $L = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{\sigma T^4}{3}\left(V_2 - V_1\right)$. Se obține $Q = \frac{4}{3}\sigma T^4\left(V_2 - V_1\right)$.

*

16. Din $M = \chi H$ și legea lui Curie $\chi = \frac{C}{T}$ se obține $M = \frac{CH}{T}$.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În virtutea relației $T\left(\frac{\partial A_i}{\partial T}\right)_{a_i} = \left(\frac{\partial U}{\partial a_i}\right)_T + A_i$ scrisă pentru un sistem termodinamic simplu, $A=-H$ și $a=M$ se poate scrie: $-T\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M = \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T - H$.

Cum, $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M = \frac{M}{C}$ rezultă $\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T = 0$ și energia internă U va depinde numai de temperatură: $U=U(T)$.

*

17. Folosim relația $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p = -\frac{\nu RT}{V} \Rightarrow F(V_2,T) - F(V_1,T) = RT\ln(V_1/V_2)$

Cu relația $\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V = \frac{\nu RT}{p}$, se obține : $G(p_2,T) - G(p_1,T) = RT\ln(p_2/p_1)$

*

18. $dG = d(H-TS) = dH - TdS - SdT = -TdS = -dQ$ deoarece procesul izoterm este și izoentalpic.

*

19. Considerăm ciclul Carnot din figură cu izotermele 1→2 și 3→4 și adiabatele 2→3 și 4→1, iar $T_1 > T_2$. Să se calculeze lucrul mecanic L_{ij} și căldura Q_{ij} pe fiecare porțiune a ciclului.

Avem : $L_{12} = -\int_1^2 pdV = -\frac{\sigma}{3}T_1^4(V_2 - V_1); Q_{12} = \frac{4}{3}\sigma T_1^4 \int_1^2 dV = \frac{4}{3}\sigma T_1^4(V_2 - V_1) > 0$

$$Q_{23} = 0, L_{23} = -\int_1^2 pdV = -\frac{\sigma}{3}T_1^4 V_2^{4/3}\int_2^3 V^{-4/3}dV = \sigma T_1^4\left(V_2^{4/3}V_3^{-1/3} - V_2\right)$$

în care s-a folosit ecuația adiabatei $pV^{4/3} = p_2V_2^{4/3} = \frac{1}{3}\sigma T_1^4 V_2^{4/3}$. Cum $V_2T_1^3 = V_3T_2^3$ rezultă $T_2 = T_1\cdot(V_2/V_3)^{1/3}$ astfel ,că $L_{23} = \sigma T_2^4 V_3 - \sigma T_1^4 V_2$. Un calcul analog, stabilește că :

$$L_{34} = -\frac{\sigma}{3}T_1^4(V_4 - V_3) \quad ; \quad Q_{34} = \frac{4}{3}\sigma T_2^4(V_4 - V_3) < 0$$

$$L_{41} = \sigma T_1^4 V_1 - \sigma T_2^4 V_4 \quad ; \quad Q_{41} = 0.$$

Cum pe întreg ciclul $Q = -L$, rezultă $Q_{12} + Q_{34} = -(L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{41})$. Scriind ecuațiile adiabatelor $V_2T_1^3 = V_3T_2^3$ și $V_4T_2^3 = V_1T_1^3$ se obține relația $V_4/V_3 = V_1/V_2$ și ,

$$\frac{Q_{31}}{T_2} = \frac{4}{3}\sigma T_2^3(V_4 - V_3) = \frac{4}{3}\sigma T_1^3(V_1 - V_2) = -\frac{Q_{12}}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{34}}{T_2} = 0$$

*

20. Într-o dilatare adiabatică $(dQ = 0)$ și liberă $(dL = 0)$ rezultă în virtutea principiului întâi, $dU = 0$ ceea ce implică $TdS = pdV$ sau, echivalent $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T} > 0$. Cum $dV > 0$, rezultă $dS > 0$. Într-un proces izobar, $dQ_p = dU + pdV = d(U + pV) = dH$. Dacă procesul izobar evoluează adiabatic $dQ_p = dH = 0$ și utilizând ecuația fundamentală a termodinamicii,

$$dH = d(U + pV) = dU + pdV + Vdp = TdS + Vdp = 0$$

din care se obține $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_H = -\frac{V}{T} < 0$ și cum $dp < 0$ rezultă creșterea entropiei.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

21. Scriem ecuația fundamentală $ds = \frac{dU}{T} - \frac{H}{T}dM = \frac{\nu C_V dT}{T} - \frac{H}{T}dM = \nu C_V d\ln T - \frac{H}{T}dM$

echivalentă,cu : $d\left(s - \nu C_V \ln T\right) = -\frac{H}{T}dM$ .Cum membrul stâng este o diferențială totală exactă, rezultă că și membrul drept trebue să fie, ceea ce presupune ca $M=M(H/T)$.

*

*22.*a).Considerăm $u = u(T,M); ds = \frac{du - HdM}{T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_M dT + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T - H\right]dM$.

Impunem condiția egalității derivatelor mixte, $\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_M\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T - H\right]\right\}$

din care rezultă $\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T = -T^2\left(\frac{\partial\left(\frac{H}{T}\right)}{\partial T}\right)_M$.În virtutea relației $M = f\left(\frac{H}{T}\right)$, reiese că la magnetizare constantă, raportul H/T este și el constant astfel, că : $\frac{\partial(H/T)}{\partial T} = 0$ și ca urmare,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T = 0 .$$

b).Diferențiind relația $M = f\left(\frac{H}{T}\right)$,obținem $dM = f'\left(\frac{H}{T}\right)d\left(\frac{H}{T}\right)$ și,

$$ds = \frac{du(T)}{T} - \frac{H}{T}f'\left(\frac{H}{T}\right)d\left(\frac{H}{T}\right).$$

Se obține, prin integrare, $\Delta s = \int\frac{du(T)}{T} - \int_0^{H/T} yf'(y)dy = g(T) - \frac{H}{T}f(H/T) + \int_0^{H/T} f(y)dy$.

*

*23.*Considerăm relația $C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ și relația Maxwell $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ .Se obține :

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp = \frac{C_p}{T}dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp .$$

Considerând în locul parametrului extern V, magnetizația M iar în locul forței generalizate p mărimea $-H$ și ținând seama că procesul decurge adiabatic, se obține încă

$$c_H dT + T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dH = 0 .$$

Din legea lui Curie : $M = \frac{CH}{T}$ calculăm derivata $\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = \frac{CH}{T^2}$ .Rezultă,

$$c_H dT - T\frac{CH}{T}dH = 0$$

sau echivalent, $\frac{dT}{T} = CHdH$ care integrată, conduce la : $const. \cdot \frac{T'}{T} = \frac{CH^2}{2}$ din care se obține

$T' = T\exp.\left(aH^2\right)$cu, $a = \frac{C}{const.} \cdot \frac{1}{2}$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

24. Scriem ecuația Clapeyron pentru echilibrele solid –gaz și lichid – gaz :

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{s-g} = \frac{s_g - s_s}{v_g - v_s} \text{ și } \left(\frac{dp}{dT}\right)_{l-g} = \frac{s_g - s_l}{v_g - v_l}.$$

Există, inegalitățile : $v_g >> v_l$ și $v_g >> v_s$ și $s_g > s_l > s_s$ privind entropia ca pe o măsură a dezordinii. În continuare avem : $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{s-g} \cong \frac{s_g - s_s}{v_g} > \frac{s_g - s_l}{v_g} = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{l-g}$.

*

25. Entalpia diferențială a unui sistem cu un număr variabil de particule, se scrie

$$dG = Vdp - SdT + \mu dN$$

Dacă sistemul este și unicomponent, $G(p,T,N) = N \cdot \mu(p,T) \Rightarrow dG = Nd\mu + \mu dN$.

Se obține : $Nd\mu = -SdT + Vdp$ sau echivalent, $d\mu = -sdT + vdp$ în care $s = \frac{S}{N}$ și $v = \frac{V}{N}$.

Echilibrul fazelor presupune egalizarea parametrilor intensivi:

$$\mu_1(p,T) = \mu_2(p,T) \quad \text{sau} \quad d\mu_1(p,T) = d\mu_2(p,T).$$

Obținem : $-s_1 dT + v_1 dp = -s_2 dT + v_2 dp$ sau echivalent $\frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}$.

Saltul entropiei specifice fiind corelat cu căldura molară a tranziției λ prin relația:

$$\lambda = T(s_2 - s_1)$$

Rezultă, în final $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)}$.

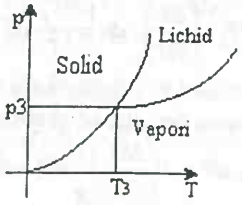
*

26. Se pleacă de la ecuația Clapeyron : $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)}$. În cadrul ipotezelor de lucru ale problemei $v_{gaz} >> v_{lichid}$ și $v_{gaz} = \frac{RT}{p}$. Se obține $\frac{dp}{p} = \frac{\lambda}{R}\frac{dT}{T}$ care integrată, conduce la :

$$p \sim exp\left(-\frac{\lambda}{RT}\right).$$

*

27.



În punctul triplu, ecuațiile trebuiesc satisfăcute simultan. Rezultă din calcul, $T_3 = 143{,}9K$.

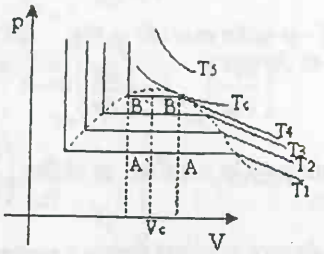
*

28. Se folosește ecuația Clapeyron $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_f - v_i)}$ unde λ este căldura latentă molară iar v_i și v_f volumele molare ale fazelor inițială și finală. Considerând vaporii de amoniac gaz ideal, $pV = RT$ și prin neglijarea volumelor lichidului și solidului în comparație cu volumul vaporilor, se obține : $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda_v}{RT^2}$ din care, rezultă : $\ln p = -\frac{\lambda_s}{RT} + const.$ și $\ln p = -\frac{\lambda_v}{RT} + const$.

*

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

29.
a)



În partea stângă a diagramei pe curba prezentată curbat fluidul este în stare lichidă, iar în partea dreaptă în stare de vapori, astfel că pe măsură ce ne deplasăm pe orizontală spre dreapta, constatăm o creştere procentuală a vaporilor pusă pe seama descreşterii procentuale a lichidului faţă de cantitatea de lichid iniială. Tubul fiind sigilat, încălzirea fluidului este izocoră şi aşa cum rezultă din figură, odată cu deplasarea pe verticala AB (pentru care $V \geq V_c$) de la A către B –pe măsura creşterii temperaturii raportul lichid/vapori scade până când în B $(T = T_4)$ fluidul s-a transformat în totalitate în vapori. Ca urmare, pe măsura creşterii temperaturii, meniscul în tub scade, dispărând în fundul tubului.

b) Considerând în zona $V << V_c$ izocora A'B' deplasarea din A' spre B' însoţită de creşterea temperaturii, detemină creşterea raportului lichid/vapori până în punctul B' când sistemul se găseşte în întregime în stare lichidă . În tub, meniscul creşte până când dispare în vârf.

c) În cazul când $V = V_c$ prin deplasarea de jos în sus pe acestă izocoră, raportul lichid/vaporii rămâne finit până la atingerea temperaturii critice T_c peste care fluidul există doar sub formă gazoasă. Prin creştere temperaturii spre temperatura critică, meniscul rămâne în tub şi dispare numai la atingerea temperaturii critice.

*

30. Se consideră ecuaţia Clapeyron pentru $T \to 0K$. Se obţine: $\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta s}{\Delta v} \to 0$ ceea ce pune în evidenţă o pantă orizontală.

*

31. În virtutea principiului al treilea al termodinamicii, la $0K$ entropia încetează să mai depindă de vre-un parametru, adică $\left(\frac{\partial S}{\partial H_m}\right)_T \to 0$ *când* $T \to 0K$. S-a notat cu H_m intensitatea câmpului magnetic. Pentru substanţele paramagnetice $TdS = dU - H_m dM$ sau echivalent , $d(U - TS - H_m M) = -SdT - MdH_m$ în care impunem condiţia de diferenţială totală exactă şi obţinem:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H_m}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{H_m}.$$

Cum $\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{H_m} \to 0$ când $T \to 0K$, iar $M = \chi_T H_m$ rezultă de asemenea $\frac{\partial \chi_T}{\partial T} \to 0$ când $T \to 0K$.

Experimental, se constată că pentru temperaturi suficient de joase, χ încetează să mai depindă de temperatură devenind constantă.

*

32. Considerăm volumul dielectricului ca funcţie de φ, p şi T. Se obţine:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) dT$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

La presiune şi temperatură constante, $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{p,T} d\varphi$. Rezultă pentru entalpia liberă G a dielectricului $G = U + pV - TS - \varphi \cdot q$, din care $dG = Vdp - SdT - qd\varphi$ sau, echivalent

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{p,T} = -\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_{\varphi,T}$$

astfel că, $dV = -\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_{\varphi,T} d\varphi$. Cum $q = C\varphi = \varepsilon_r C_0 \varphi$, se obţine: $\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_{\varphi,T} = C_0\varphi\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial p}\right)_{\varphi,T}$ relaţie ce conduce la $dV = -C_0\varphi\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial p}\right)_{\varphi,T} d\varphi$ care integrată pentru o creştere a tensiunii între 0 şi φ permite calculul variaţiei ΔV a volumului dielectricului prin electrostricţiune: $\Delta V = -\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial p}\right)_{\varphi,T} \cdot \frac{C_0\varphi^2}{2}$

Această relaţie arată că variaţia ΔV a volumului dielectricului este un efect pătratic ce nu depinde de semnul lui φ. Variaţiile $\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial p}\right)_{\varphi,T}$ şi $\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_{\varphi,T}$ sunt mărimi pozitive întrucât la creşterea presiunii dielectricului, creşte numărul moleculelor polarizabile pe unitatea de volum determinând o creştere a constantei dielectrice ε_r echivalentă cu creşterea capacităţii condensatorului şi deci a cantităţii de sarcină q acumulate. Rezultă astfel că *la creşterea tensiunii φ pe condensator se produce o micşorare a volumului dielectricului şi invers.*

*

33. Considerăm $V = V(p,T,H_m)$. Avem, $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,H_m} dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,H_m} dT + \left(\frac{\partial V}{\partial H_m}\right)_{p,T} dH_m$.

La presiune şi temperatură constante, $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial H_m}\right)_{p,T} dH_m$. Entalpia liberă G se scrie:

$$G = U + pV - TS - \mu_0 \vec{H}_m V\vec{M}.$$

Se obţine, $dG = Vdp - Sdp - \mu_0 V\vec{M}d\vec{H}$ din care, rezultă

$$\left(\frac{\partial V}{\partial H_m}\right)_{p,T} = -\left(\frac{\partial(\mu_0 VM)}{\partial p}\right)_{H_m,T} \text{ astfel, că } dV = -\mu_0 V\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_{H_m,T} dH_m.$$

- pentru *o substanţă paramagnetică* $M = \frac{C}{T}H$. Rezultă $\Delta V = 0$;
- pentru *o substanţă feromagnetică* $M = \chi H_m$ în care susceptivitatea χ depinde de H_m şi de p.

Rezultă, $dV = -\mu_0 V\left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_{H_m,T} \cdot H_m \cdot dH_m$ care integrată pentru valori ale intensităţilor câmpului magnetic cuprinse între 0 şi H_m conduce, la: $\Delta V = -\mu_0 V\left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_{H_m,p} \frac{H_m^2}{2}$

34. Lucrul elementar total în procesul de polarizare magnetică, se scrie:

$$dL = -pdV + \mu_0 \vec{H}_m d(V\vec{M})$$

în care al doilea termen reprezintă lucrul de polarizare magnetică. Din ecuaţia fundamentală $dU = TdS - pdV + \mu_0 \vec{H}_m d(V\vec{M})$ energia liberă G, are expresia $G = U + pV - TS - \mu_0 \vec{H}_m V\vec{M}$ din care, rezultă $dG = Vdp - SdT - \mu_0 V\vec{M}d\vec{H}_m$ sau, ţinând seama că dG este o diferenţială totală

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

exactă, $\left(\frac{dS}{\partial H_m}\right)_{T,p} = \left(\frac{\partial(\mu_0 V\vec{M})}{\partial T}\right)_{\vec{H}_m,p}$

În virtutea principiului lui Nernst, $\lim_{T\to 0K}\left(\frac{\partial S}{\partial H_m}\right)_{T,p} = 0$ astfel, că $\lim_{T\to 0K}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial T}\right)_{\vec{H}_m,p} = 0$.

*

35. Se foloseşte ecuaţia Clapeyron $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T_0\left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_s}\right)}$ în care $\frac{1}{\rho} = \frac{V}{n} = v$.

Prin integrare, se obţine $\Delta p = p - p_0 = \frac{\lambda}{T_0\left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_s}\right)}\Delta T$.

*

36. Se consideră unitatea de masă din metalul ce suferă transformarea pentru care se scrie:

$$du = Tds - pdv + \mu_0 \vec{H}_m d(v\vec{M}) \qquad (1)$$

unde $v\cdot\vec{M}$ este momentul de dipol al unităţii de masă. Diferenţiind energia liberă a unităţii de masă $g = u + pv - Ts - \mu_0 \vec{H}_m v\vec{M}$ se obţine:

$$dg = vdp - sdT - \mu_0 v\vec{M}d\vec{H}_m \qquad (2)$$

La presiune constantă $dg = -sdT - \mu_0 v\vec{M}d\vec{H}_m$

Vom nota cu indicele *n starea normală*, iar cu *s, starea supraconductoare*. Pentru o variaţie a temperaturii cu dT corespunzătoare variaţie dH_c a intensităţii câmpului magnetic critic, condiţia de continuitate a entalpiei libere la tranziţia $n \to s$, $dg_n = dg_s$ conduce, la:

$$s_n - s_s = \mu_0 v(\vec{M}_s - \vec{M}_n)\frac{d\vec{H}_c}{dT} \qquad (3)$$

Căldura latentă a unităţii de masă este:

$$\lambda = T(s_n - s_s) = \mu_0 Tv(\vec{M}_s - \vec{M}_n)\frac{d\vec{H}_c}{dT} \qquad (4)$$

În starea normală, $\vec{M}_n = 0$ iar în cea supraconductoare $\vec{B} = 0$ (efect Meissner).

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H}_c + \vec{M}_s) = 0 \Rightarrow \vec{M}_s = -\vec{H}_c$$

Rezultă

$$\lambda = -\mu_0 Tv\vec{H}_c\frac{d\vec{H}_c}{dT} \qquad (5)$$

Cum $\frac{d\vec{H}_c}{dT} = -\frac{2TH_0}{T_c^2}$, se obţine:

$$\lambda = 2\mu_0 H_0^2 v\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]. \qquad (6)$$

Pentru $T = T_c$, rezultă $\lambda = 0$ adică la temperatura critică, schimbarea fazei se produce fără transfer de căldură. Observând că $v = \frac{v}{m} = \frac{1}{\rho}$, relaţia (6) se scrie:

$$\lambda = \frac{2B_0^2}{\rho\mu_0}\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] \qquad (7)$$

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Considerând $\mu \approx \mu_0$, $B = \mu_0 H_0$ astfel că obținem relația finală:

$$\lambda = \frac{2B_0^2}{\rho\mu_0}\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] \qquad (8)$$

*

37. Scriem entropia diferențială a unității de masă: $ds = \frac{dq}{T} = c\frac{dT}{T}$. Se obțin căldurile specifice ale stărilor: $c = T\frac{ds}{dT}$, $c_n = T\frac{ds_n}{dT}$, $c_s = T\frac{ds_s}{dT}$. Căldura latentă a unității de masă, λ va fi: $\lambda = T(s_n - s_s) = \frac{2\mu_0 H_0^2}{\rho}\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$ dedusă în problema anterioară. Se obține:

$$s_n - s_s = \frac{2\mu_0 H_0^2}{\rho}\cdot\frac{T}{T_c^2}\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$$

Condiția de continuitate a căldurilor specifice la trecerea $n \to s$ presupune ca $c_n = c_s$. Rezultă,

$$T\frac{ds_n}{dT} = T\frac{ds_s}{dT} \Rightarrow \frac{d}{dT}(s_n - s_s) = 0 \text{ sau } \frac{d}{dT}\left\{T\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]\right\} = 0,$$

din care se obține $1 - \frac{3T^2}{T_c^2} = 0$ echivalentă cu $T' = \frac{T_c}{\sqrt{3}}$.

*

38. Căldura latentă de transformare a unității de masă, este $\lambda = T(s_n - s_s)$.
Pentru T', $s_s = 0 \to s_n = \lambda/T'$, sau înlocuind expresia pentru λ obținută anterior,

$$s_n = \frac{2\mu_0 H_0^2}{\rho}\frac{T'}{T_c^2}\left[1-\left(\frac{T'}{T_c}\right)^2\right]$$

Cum $c_n - c_s = T\frac{d}{dT}(s_n - s_s)$ iar $s_n - s_s = \frac{2\mu_0 H_0}{\rho}\frac{T}{T_c^2}\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$ rezultă

$$\frac{d}{dT}\left\{T\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]\right\} = 1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2 - \frac{2T^2}{T_c^2} = 1-\frac{3T^2}{T_c^2}$$

Se obține: $c_n - c_s = \frac{2\mu_0 H_0^2}{\rho}\frac{T}{T_c^2}\left(1-3\frac{T^2}{T_c^2}\right)$ care exprimă faptul că la temperatura critică $T = T_c$,

$c_n - c_s = -\frac{4\mu_0 H_0^2}{\rho T_c}$ cu $\lambda = 0$ pentru cazul considerat de noi, așa cum rezultă din ipoteză și din relațiile stabilite. Căldura latentă fiind nulă, tranziția de fază de la starea normală n la starea supraconductoare s este o tranziție de fază de ordinul doi întrucât conform ultimei relații, căldurile specifice manifestă un salt. Scăderea entropiei în procesul tranziției $n \to s$ arată că starea supraconductoare este mai ordonată decât starea normală, entropia fiind o măsură a dezordinii sistemului. O parte sau toți electronii excitați termic în starea normală vor fi ordonați în starea supraconductoare. Pentru $\mu \approx \mu_0$, $B = \mu_0 H_0$ avem $s_n = \frac{2B_0^2}{\rho\mu_0}\cdot\frac{T'}{T_c^2}\left[1-\left(\frac{T'}{T_c}\right)^2\right] = \frac{\lambda}{T'}$ și

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$c_n - c_s = -\frac{4B_0^2}{\rho\mu_0 T_c}.$$

*

39. Notăm cu ϵ puterea termolelectrică şi scriem relaţiile

$$Q = i\Pi \text{ şi } \epsilon = \frac{\Pi}{T} = \frac{d\mathcal{E}}{dT}.$$

Cu presupunerea $T_1 = const$, se obţine:

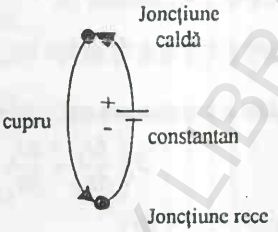
$$\epsilon = 3{,}8\cdot10^{-5} + 8{,}2\cdot10^{-2}T_2$$

Pentru joncţiunea caldă

$$\Pi = \epsilon T = 3.8\cdot10^{-5}T_2 + 8.2\cdot10^{-8}T_2^2 \text{ şi}$$

$$Q = i\Pi = 10^{-2}(3.8\cdot10^{-5}\cdot300 + 8.2\cdot10^{-8}\cdot9\cdot10^4) =$$

$$= 18.78\cdot10^{-5} j\cdot s^{-1} = 18.78\cdot10^{-8} W.$$



*

40..a).Notând cu P_t momentul electric dipolar total, entropia S şi intensitatea câmpului electric E rezultă din relaţiile:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{P_t} \tag{1}$$

$$E = \left(\frac{\partial F}{\partial P_t}\right)_T \tag{2}$$

în care momentul dipolar total P_t are expresia

$$P_t = (\varepsilon - 1)\cdot\frac{E}{4\pi}V = (\varepsilon - 1)\cdot\frac{E}{4\pi}A\cdot d \tag{3}$$

Introducem (3) în(2) şi prin integrare se obţine: $F(T,E) = F(T,0) + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}VE^2 = F(T,0) + \frac{2\pi}{\varepsilon - 1}Vp^2$

b) $U(T,E) = -T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right) = U(T,0) + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}VE^2 - \left(2aT^2 - bT\right)\cdot\frac{1}{8\pi}VE^2$

c).Prin variaţia nestaţionară a diferenţei de potenţial de la *0* la φ, dielectricul absoarbe căldura: $dQ = TdS$ astfel că, ţinând seama de relaţia $E = \frac{\varphi}{d}$ rezultă pentru căldura degajată în dielectric:

$$-Q = -T[(S(T,E) - S(T,0))] = VT\frac{\varphi^2}{8\pi d^2}\frac{d\varepsilon(T)}{dT} = -VT\frac{\varphi^2}{8\pi d^2}(2aT + b)$$

*

41. În ipoteza liniarităţii,fluxurile termodinamice se scriu $J_i = \sum_{i=1}^{n} L_{ij}X_j$ astfel că pentru diferenţiala $d\gamma_s$ a sursei de entropie se obţine $d\gamma_s = d\left(\sum_{i=1}^{n} J_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n} J_i dX + \sum_{i=1}^{n} X_i dJ_i = d_X\gamma_s + d_J\gamma_s$.

Putem observa că $d_X\gamma_s = \sum_{i,k} L_{ik}X_k dX_i = \sum_{i,k} X_{ik}d(L_{ik}X_i) = d_J\gamma_s = \frac{1}{2}d\gamma_s$ sau echivalent ,

$2d_X\gamma_s = d\gamma_s$.Considerăm ,pentru simplificarea calculelor $n=3$.

Pentru ca forma Pfaff $d\gamma_s = 2(j_1dX_1 + j_2dX_2 + j_3dX_3)$ să fie olonomă,adică să admită un factor integrant $\frac{1}{2}\lambda(x_1, x_2, x_3)$ trebuie ca:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lambda(x_1,x_2,x_3)d\gamma_3 = d\Phi(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Phi}{\partial X_i}dX_i$$

Rezultă $\frac{\partial\Phi}{\partial X_i} = \lambda J_i; (i = 1,2,3)$ Prin egalarea derivatelor mixte de ordinul doi ale funcției Φ pentru orice pereche de indici $i \neq j$ $(i,j = 1,2,3)$ se obțin relațiile $\frac{\partial}{\partial X_i}(\lambda J_j) = \frac{\partial}{\partial X_j}(\lambda J_i); (i \neq j)$.

Eliminând λ între aceste trei relații, rezultă condiția necesară de olonomie a formei $d\gamma_3$:

$$J_1\left(\frac{\partial J_3}{\partial X_2} - \frac{\partial J_2}{\partial X_3}\right) + J_2\left(\frac{\partial J_1}{\partial X_3} - \frac{\partial J_3}{\partial X_1}\right) + J_3\left(\frac{\partial J_2}{\partial X_1} - \frac{\partial J_1}{\partial X_2}\right) = 0$$

Cum $\frac{\partial J_i}{\partial X_j} = L_{ij}$ și $\frac{\partial J_j}{\partial X_i} = L_{ji}$ ultima relație este identic satisfăcută dacă sunt îndeplinite condițiile lui Onsager $L_{ij} = L_{ji}$.

*

42. Când mediul din exteriorul cavității este mai dens decât cel conținut în cavitate, pe pereții interiori ai cavității se vor forma noduri iar în cealaltă situație,când mediul din interiorul cavității este mai dens decât cel din exterior, se vor forma ventre.În cazul unei unde staționare formate între fețele cubului, perpendiculare pe axa Ox, avem: $a = n_x\frac{\lambda_x}{2}$ și $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x} = n_x\frac{\pi}{a}$.

Analog, $k_y = n_y\frac{\pi}{a}$; $k_z = n_z\frac{\pi}{a}$, astfel că vectorul de undă este cuantificat prin relația:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\nu} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\pi}{a}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{\pi n}{a},$$

în care $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2a}{\lambda} = \frac{2a\nu}{\nu}$ are – de regulă – valori mai mari decât *1*.

Vom considera un spațiu fictiv al numerelor reale n_x, n_y, n_z în care fiecărei unde staționare i se asociază un punct cu coordonate întregi. Întrucât n este cu câteva ordine de mărime mai mare decât *1* rezultă că numărul undelor staționare diferite cu frecvențe cuprinse între ν , $\nu + \Delta\nu$ este egal cu volumul octantului $(n_x, n_y, n_z > 0)$ de coroană sferică cuprinsă între sferele de raze n și $n + \Delta n$:

$$\Delta\Sigma(\nu, \nu + \Delta\nu) = \frac{1}{8}4\pi n^2\Delta n = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2a\nu}{\nu}\right)^2\frac{2a\Delta\nu}{\nu} = \frac{4\pi\nu^2 a^3\Delta\nu}{\nu^3}$$

Se obține astfel expresia densității spectralo-volumice (după frecvențe) a numărului de stări ondulatorii distincte: $\sigma_\nu = \frac{\Delta\Sigma(\nu,\nu+\Delta\nu)}{a^3\Delta\nu} = \frac{4\pi\nu^2}{\nu^3}$, ν fiind viteza de fază a undelor din cavitate.

*

43. Scriem dependențele $S=S(p,H)$, $V=V(p,H)$ și $M=M(p,h)$ apoi forma diferențială a primului principiu: $dU = Tds - pdV + \mu_0 HdM$. Calculăm diferențialele implicate în această ecuație ți - nând seama că dU este o diferențială totală exactă. Se obține:

$$\frac{\partial}{\partial H}\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_H - p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_H\right]_T = \frac{\partial}{\partial p}\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_p + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_p\right]_H$$

Rezultă în urma efectuării calculelor, $\mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_{T,H} = -\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{T,p}$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

44. Prin neglijarea variației volumului, expresia diferențială a primului principiu al termodinamicii se reduce la $dU=Tds+EdP$. *Amintim că scrierea mărimilor cu litere mici este motivată de raportarea la unitatea de volum.*

Într-un proces izoterm în care câmpul electric variază de la 0 la E, variația entropiei este dată de relația $ds=\left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T dE=\frac{dq}{T}$. Pentru a calcula $\left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T$ ne folosim de energia liberă g a unității de volum $g=u-Ts-EP$ din care, rezultă $dg=-sdT-PdE$ și cum dg este diferențială totală exactă, $\left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E=\left[\frac{\partial(\varepsilon_0\chi E)}{\partial T}\right]_E=\varepsilon_0 E\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}\right)_E$ care conduce la:

$$dq=TdS=\varepsilon_0 T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_E EdE.$$

Integrând această relație, se obține: $\Delta Q=\int_0^E T\varepsilon_0\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_E EdE=\frac{1}{2}T\varepsilon_0\frac{d\varepsilon}{dT}E^2$.

În cazul particular propus, $\frac{d\varepsilon}{dT}=-\frac{ct.}{T^2}$ și ΔQ capătă forma: $\Delta Q=-\frac{1}{2}E^2\varepsilon_0\frac{ct.}{T}<0$,

relație care exprimă faptul că *prin polarizarea dielectricului, sistemul cedează căldură.*

*

45.

a). În acest caz sursa de entropie capătă forma: $\gamma_s=\vec{J}_Q\nabla\left(\frac{1}{T}\right)$ iar ecuația fenomenologică, se scrie: $\vec{J}=L_Q\nabla\left(\frac{1}{T}\right)$.

b). Avem $\rho\frac{du}{dt}=\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}=-\nabla\vec{J}_Q$, în care u este energia internă a unității de volum, iar c_v este căldura masică la volum constant.

Producția de entropie $\int_V v_s dV=\int_V \vec{J}_Q\nabla\left(\frac{1}{T}\right)dV=\int_V L_Q\left[\nabla\frac{1}{T}\right]^2 dV$ va fi minimă dacă în baza principiului variațional, $\delta\left\{L_Q\int_V\left(\nabla\frac{1}{T}\right)^2 dV\right\}=0$. Soluția acestei probleme variaționale rezultă din rezolvarea ecuației lui Euler: $\nabla\left(\nabla\frac{1}{T}\right)=\nabla\frac{\vec{J}_Q}{L_Q}=0$. Rezultă $\nabla\vec{J}_Q=0$ ceea ce arată că în starea staționară – așa cum de altfel era de așteptat – avem $\frac{\partial T}{\partial t}=0$.

c). Păstrăm notațiile din problema *41*, $d_x\gamma_s=\sum J_i dX_i$ și $d_J\gamma_s=\sum X_i dJ_i$, unde s-a stabilit relația $d_x\gamma_s=d_J\gamma_s=\frac{1}{2}d\gamma_s$.

Această relație se păstrează și pentru producția totală de entropie. Notăm cu Ω suprafața de separație a subsistemelor și observăm că

$$\frac{\partial_x}{\partial t}\left(\frac{d_i S}{dt}\right)=\int_\Omega \vec{J}_Q\left(\nabla\frac{1}{T}\right)dV=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{T}\right)\vec{J}_Q d\Omega-\int_V\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{T}\right)\nabla\vec{J}_Q dV$$

Întrucât temperatura se menține constantă pe suprafața de separație Ω, prima integrală se anu-

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

leză. Se obține: $\frac{\partial_x}{\partial t}\left(\frac{d_i S}{dt}\right) = -\int_V \frac{\rho c_v}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 dV \le 0$ relație evidentă, ținând seama că $c_v > 0$.

Întrucât $\frac{\partial_x}{\partial t}\left(\frac{d_i S}{dt}\right) = \frac{\partial_J}{\partial t}\left(\frac{d_i S}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d_i S}{dt}\right)$ rezultă că $\frac{\partial P}{\partial t} \le 0$.

Semnul de egalitate descrie regimul staționar.

*

46. Notăm cu u și s energia internă, respectiv entropia unității de volum ce depind de T și H dacă neglijăm variația volumului. Dacă dq este căldura transferată unității de volum,

$$dq = Tds = T\left[\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T dH\right].$$

Rezultă $c_H\left(\frac{dq}{dT}\right)_H = T\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_H$. Diferențiind entropia,

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T dH = \frac{c_H}{T} dT + \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T dH .$$

Transformarea fiind adiabatică, $ds = 0$. Se obține $dT = -\frac{T}{c_H}\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T dH$.

De asemenea, se pot scrie următoarele diferențiale:

$$dM = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T dH \text{ și}$$

$$du = Tdp + \mu_0 HdM = \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right]dT + \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T\right]dH$$

Cum du este diferențială totală exactă,

$$\frac{\partial}{\partial H}\left[T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right]_T = \frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T\right]_H .$$

Se obține $\mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T$ și $\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = -\frac{CH}{T_2}$ din legea lui Curie. Rezultă, în final:

$$dT = \mu_0 \frac{CH}{c_H T} dH.$$

*

47. Primul principiu al termodinamicii se scrie pentru mărimile raportate la unitatea de volum: $du = dq - pdV + \mu_0 HdM$. Pentru T și V constante, rezultă $du = 0$ și

$$dQ = -\mu_0 HdM = -\mu_0 \frac{c}{T} dH$$

În cazul nostru, $T = T_1$ și prin integrarea acestei relații se obține:

$$q = -\int_0^{H_1} \mu_0 \frac{CH}{T_1} dH \text{ sau } dq = -\frac{\mu_0 C}{2T_1} H_1^2 .$$

*

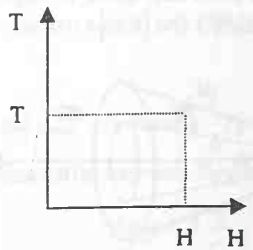
48.

$$ds = \frac{du - \mu_0 HdM}{T} = \frac{4aT^3 dT - \mu_0 HdM}{T}$$

$$M = \chi H = \frac{CH}{T} \Rightarrow dM = \frac{CdH}{T},$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

astfel că $ds = 4aT^2dT - \mu_0 \frac{C}{T^2} HdH$. Cum ds este o diferențială totală exactă, această relație se poate integra pe conturul din figură .Obținem: $s = \int_0^T 4aT^2dT - \mu_0 \frac{C}{T^2} \int_0^H HdH$



$$s = \frac{4}{3}aT^3 - \frac{\mu_0 C}{2}\left(\frac{H}{T}\right)^2 + s_0.$$

Considerăm că demagnetizarea are loc de la valoarea $H=H_1$ a câmpului magnetic când temperatura are valoarea T_1 la valoarea $H=0$ când temperatura are valoarea T_2. Într-un proces adiabatic entropia rămânând constantă, se poate scrie:

$$\frac{4}{3}aT_2^3 = \frac{4}{3}aT_1^3 - \frac{\mu_0 C}{2}\left(\frac{H_1}{T_1}\right)^2 \text{ din care, } T_2^3 = T_1^3 - \frac{3\mu_0 C}{8a}\left(\frac{H_1}{T_1}\right)^2.$$

Cum $C>0$, $a>0$, rezultă $T_2<T_1$, iar în baza identității

$T_2^3 - T_1^3 = (T_2 - T_1)(T_2^2 + T_1T_2 + T_1^2) \cong (T_2 - T_1)3T_1^2$, deducem $T_2 - T_1 = -\frac{\mu_0 C H_1^2}{8aT_1^4}$.

*

49. Primul principiu scris pentru mărimile raportate la unitatea de volum în ipoteza neglijării variației volumului, conduce la: $ds = \frac{du + \mu_0 HdM}{T}$

Considerând $u=u(T,M)$, se obține: $ds = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_M dT + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T - \mu_0 H\right]dM.$

Cum ds este o diferențială totală exactă avem: $\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_M\right]_T = \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T - \mu_0 H\right]\right\}_M$.

Se obține: $\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T = -\mu_0 T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H}{T}\right)_M$. Prin ipoteză, $M = f\left(\frac{H}{T}\right)$ și $M=ct.$ Rezultă $\frac{H}{T} = ct.$ și deci $\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T = 0$. Întrucât $dM = f'\left(\frac{H}{T}\right)d\left(\frac{H}{T}\right)$, rezultă $ds = \frac{du(T)}{T} - \frac{H}{T}f'\left(\frac{H}{T}\right)d\left(\frac{H}{T}\right)$.

Notăm $\alpha = \frac{H}{T}$ și obținem: $s = \int \frac{du(T)}{T} - \int_0^{\frac{H}{T}} \alpha f'(\alpha)d\alpha$. Calculăm integrala a doua prin părți și rezultă $s = f(T) - \frac{H}{T}f\left(\frac{H}{T}\right) + \int_0^{\frac{H}{T}} f(\alpha)d\alpha.$

*

50. În absența câmpului electric, orientarea momentelor dipolare ale moleculelor este haotică datorită vibrațiilor moleculelor. Câmpul electric orientează dipolii moleculari pe o direcție corespunzând unei energii de interacțiune. Energia de interacțiune a moleculei cu câmpul este de natură potențială și se exprimă prin: $W(\theta) = -\vec{p}_0\vec{E} = -p_0E\cos\theta$ unde θ este unghiul între momentul de dipol electric $\vec{p}_0$ și câmpul electric, $\vec{E}$.

Valoarea medie a componentei momentului dipolar molecular, paralelă cu direcția câmpului

$$\bar{\vec{p}} = \overline{p_0\cos\theta} = \int_\Omega p_0\cos\theta\mathcal{P}(\Omega)d\Omega$$

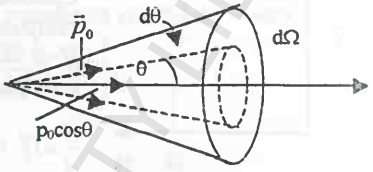
BCU "LUCIAN BLAGA" UNIVERSITY LIBRARY

unde

$$\mathcal{P}(\Omega)d\Omega = \frac{exp\left(\frac{E(\theta)}{kT}\right)}{\int e^{-\frac{W(\theta)}{kT}} d\Omega}$$

reprezintă fracțiunea din moleculele dipolare ce se află în unghiul solid $d\Omega$, adică în unghiul cuprins între conurile de unghiuri θ și $\theta+d\theta$. Se obține $d\Omega=2\pi\sin\theta d\theta$, $\theta\in[0,\pi]$.

$$\vec{p} = \frac{p_0\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta e^{\frac{p_0E}{kT}\cos\theta} d\theta}{\int_0^\pi \sin\theta e^{\frac{p_0E}{kT}\cos\theta} d\theta}$$



Introducem notația $a \equiv \frac{p_0E}{kT}$ și obținem:

$$\bar{\vec{p}} = p_0\frac{\partial}{\partial a}ln\int_0^\pi \sin\theta e^{a\cos\theta}d\theta = p_\theta\frac{\partial}{\partial a}ln\left[-\frac{1}{a}e^{a\cos\theta}\right]_0^\pi = p_\theta\frac{\partial}{\partial a}ln\frac{1}{a}\left(e^a - e^{-a}\right) =$$

$$= p_0\frac{\partial}{\partial a}ln\frac{2}{a}sha = p_\theta\left(\frac{cha}{sha} - \frac{1}{a}\right) = p_0\left(ctha - \frac{1}{a}\right) = p_0L(a),$$

$L(a)$ fiind *funcția lui Langevin*. Distingem două cazuri de interes:

a) $a>>1$ (E foarte mare sau T foarte mică) $ctha \to 1 \Rightarrow \frac{1}{a} \to 0 \to \bar{\vec{p}} = p_\theta$ ceea ce arată că în apropierea lui $0K$ practic toate moleculele sunt orientate paralel cu câmpul.
În cele mai multe cazuri, E este mic și ,

b) $a<<1$. Rezultă $ctha = \frac{1}{a} + \frac{a}{3} + ...; p_0 = \frac{p_\theta^2 E}{3kT}$

și polarizarea gazului va fi: $P = n\bar{p} = \frac{1}{3}np_0\frac{p_\theta E}{kT}$

*

51. a) Frecvența măsurată a radiației emise de atom ce se deplasează cu viteza v_x va avea în sistemul laboratorului, valoarea: $\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_x}{c}\right)$ unde ν_0 este frecvența radiației văzută în sistemul propriu al atomului. Rezultă, $v_x = \frac{c}{\nu_0}(\nu - \nu_0)$.

Probabilitatea ca viteza atomului de gaz să fie cuprinsă în intervalul (v_x, v_x+dv_x) este egală cu probabilitatea ca radiația emisă de atom să aibă frecvența cuprinsă în intervalul ν, $\nu+d\nu$.

$$dp = \mathcal{P}(v_x)dv_x = \mathcal{P}(\nu)d\nu = \frac{c}{\nu_0}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{c^2}{\nu_0^2}(\nu-\nu_0)^2\frac{m}{2kT}} d\nu$$

și, întrucât $dp = \frac{dN}{N}$ (dN fiind numărul atomilor ce emit radiații la o frecvență cuprinsă între ν și $\nu+d\nu$), se obține $dN = \frac{c}{\nu_0}N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{c^2}{2}(\nu-\nu_0)^2} dv_x$.

Cum intensitatea radiației este proporțională cu numărul de emițători

$$dI = I(\nu)d\nu = const\cdot dN = const\cdot e^{-\frac{c^2\mu(\nu-\nu_0)^2}{\nu_0^2 2RT}} d\nu$$

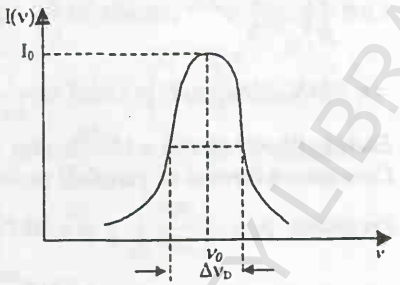
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultă

$$I(\nu) = I_0 \cdot e^{-\frac{c^2}{\nu_0^2}(\nu-\nu_0)^2 \frac{\mu}{2RT}}$$

în care $I_0=I(\nu_0)$

b) Dacă notăm $\nu_{1/2}$ frecvența radiației emise de gaz pentru care $I(\nu)=1/2I_{max}$, $\Delta\nu_D = 2\left(\nu_{\frac{1}{2}} - \nu_0\right)$



și din $I_{max}=I_0$ rezultă $\frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2}I_0 e^{-\frac{\mu c^2}{2kT}\left(\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}\right)^2}$ Se obține astfel expresia lărgimii Doppler:

$$\Delta\nu_D = 2\frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2\ln 2RT}{\mu}}$$

c) $\Delta\lambda = 1.6 \cdot 10^{-2}\,A$.

*

52. Viteza medie cu care ies moleculele în direcția axei Ox în ipoteza distribuției maxwelliene, se obține efectuând media componentelor v_x ale vitezelor moleculelor peste o distribuție maxwelliană exprimată prin relația (3.147):

$$\bar{v}_x = \frac{1}{N}\int v_x dN_i = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2KT}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z = \left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2}$$

*

53. Se scrie: $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{N} \Rightarrow \overline{N} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}}\sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}}\sqrt{\overline{v^2}}$.

Rezultă $\overline{N} = \sqrt{\frac{8\overline{v^2}}{3N}} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}} = 2 \cdot 10^8\, s^{-1}$.

*

54. Energia internă: $U = \sum_i N_i^0 E_i = \frac{N}{Z}\sum_i E_i g_i e^{-\beta E_i}$ și cum $\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\sum E_i g_i e^{-\beta E_i}$ se obține,

$U = -\frac{N}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$. De asemenea avem $\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial \beta} = Z\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ din care rezultă $U = -N\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$.

$$d\beta = d\left(\frac{1}{kT}\right) = -\frac{dT}{kT^2} \Rightarrow U = -N\frac{\partial \ln Z}{-\frac{1}{kT^2}\partial T} \Rightarrow U = NkT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T}.$$

Capacitatea calorică la volum constant $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = 2NkT\frac{\partial \ln Z}{\partial T} + NkT^2\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}$.

Se obține $C_v = NkT\left[2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_v + T\left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}\right)_v\right]$.

Entropia se evaluează pornind de la relația lui Boltzmann

$$S = k\ln P = k\ln N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = k\left(\ln N! + \sum_i N_i \ln g_i - \sum_i \ln N_i!\right) =$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY
B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI
FIZICĂ

$$= k\left(N\ln N - N + \sum_i N_i \ln g_i - \sum_i N_i \ln N_i + N \right) = k\left(N\ln N + \sum N_i \ln \frac{g_i}{N_i} \right)$$

Cum $\frac{g_i}{N_i^0} = \frac{Z}{N} e^{\beta E_i}$, rezultă $\ln \frac{g_i}{N_i^0} = \ln \frac{Z}{N} + \beta E_i \Rightarrow S = k\left(N\ln N + \sum_i N_i \ln \frac{Z}{N} + \sum_i N_i \beta E_i \right) =$

$= k\left(N\ln N + N\ln \frac{Z}{N} + \beta U \right) = kN\ln Z + k \cdot \frac{1}{kT} \cdot U$. Se obține $S = kN\ln Z + \frac{U}{T}$ sau $TS = kNT\ln Z + U$.

Energia liberă, este: $F = U - TS$, deci: $F = -NkT\ln Z$.

Cunoaşterea funcției de partiție Z permite teoretic estimarea tuturor mărimilor termodinamice:

Presiunea: $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$; $p = NkT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T$.

Entalpia: $H = U + pV = NkT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} + NkTV\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right) = NkT\left[T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V + V\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T \right]$

Entalpia liberă:

$$G = H - TS = U + pV - TS = F + pV \Rightarrow G = -NkT\ln Z + NkTV\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T$$

adică: $G = NkT\left[-\ln Z + V\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T \right]$.

*

55. Notăm cu N numărul total de molecule şi folosim distribuția Maxwell a vitezelor. Obținem:

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = e^{\frac{m}{2kT}\left(v_2^2 - v_1^2\right)} \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{2}{3} e^{\frac{1}{2}} = 1{,}1$$

în care $v_1^2 = \frac{2kT}{m}$ este pătratul vitezei cele mai probabile iar $v_2^2 = \frac{3kT}{m}$ este pătratul vitezei pătratice medii.

*

56. Fie g gradul de degenerescență al celor două nivele: $Z = g \cdot e^{-\frac{E_1}{kT}} + g \cdot e^{-\frac{E_2}{kT}}$.

Notăm: $\theta = \frac{E_2 - E_1}{k}$ temperatura caracteristică şi alegem ca referință nivelul $E_1 = 0$.

Obținem $Z = g\left(1 + e^{-\frac{E_2}{kT}}\right) = g\left(1 + e^{-\frac{\theta}{T}}\right)$; *energia internă*: $U = NkT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = Nk\theta \frac{e^{-\frac{\theta}{T}}}{1 + e^{-\frac{\theta}{T}}}$

Entropia: $S = kN\ln Z + \frac{U}{T} = kN\left[\ln g\left(1 + e^{-\frac{\theta}{T}}\right) + \frac{\theta}{T} \frac{e^{-\frac{\theta}{T}}}{1 + e^{-\frac{\theta}{T}}} \right]$; $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = Nk\left(\frac{\theta}{T}\right)^2 \frac{e^{-\frac{\theta}{T}}}{\left(1 + e^{-\frac{\theta}{T}}\right)^2}$

*

57. $N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$, $Z = \sum g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$, $P_i = \frac{g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}}{Z}$; $i = 1,2$ în conformitate cu

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

distribuția Maxwell-Boltzmann.

$$U = NkT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{N\left(g_1E_1e^{-\frac{E_1}{kT}} + g_2E_2e^{-\frac{E_2}{kT}}\right)}{g_1e^{-\frac{E_1}{kT}} + g_2e^{-\frac{E_2}{kT}}} = \frac{N\left(g_1E_1 + g_2E_2e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}}\right)}{g_1 + g_2e^{-\frac{(E_2-E_1)}{kT}}}$$

Înlocuind valorile numerice se obține: $P_1 = 0{,}46;\ P_1 + P_2 = 1;\ U = 720J \cdot mol^{-1}$.

Pentru $T \to 0K$, $U = NE_1 = 0$ iar pentru $T \to \infty$, $U = \frac{NE_2}{\frac{g_1}{g_2} + 1} = 8{,}9 \cdot 10^5 J \cdot Kmol^{-1}$.

*

58. Notăm: $\Delta E \equiv E_2 - E_1 = E_3 - E_2 = 1eV$. Avem:

$$Z = g_1e^{-\frac{E_1}{kT}} + g_2e^{-\frac{E_2}{kT}} + g_3e^{-\frac{E_3}{kT}} = e^{-\frac{E_2}{kT}}\left(g_1e^{-\frac{\Delta E}{kT}} + g_2 + g_3e^{-\frac{\Delta E}{kT}}\right)$$

Alegem ca nivel de referință $E_2 = 0$: $Z = g_1e^{\frac{\Delta E}{kT}} + g_2 + g_3e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$

Energia internă U, se scrie:

$$U = NkT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T} = NkT^2\frac{\Delta E}{kT^2}\frac{g_3e^{-\frac{\Delta E}{kT}} - g_1e^{\frac{\Delta E}{kT}}}{g_1e^{\frac{\Delta E}{kT}} + g_2 + g_3e^{-\frac{\Delta E}{kT}}}$$

Capacitatea calorică la volum constant

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = N\frac{(\Delta E)^2}{kT^2}\frac{4g_1g_3 + g_2\left(g_3e^{-\frac{\Delta E}{kT}} + g_1e^{\frac{\Delta E}{kT}}\right)}{\left(g_1e^{-\frac{\Delta E}{kT}} + g_2 + g_3e^{\frac{\Delta E}{kT}}\right)^2}$$

Se notează $x = \frac{\Delta E}{kT}$ și se consideră relațiile $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ și $1 + chx = 2ch^2\frac{x}{2}$.

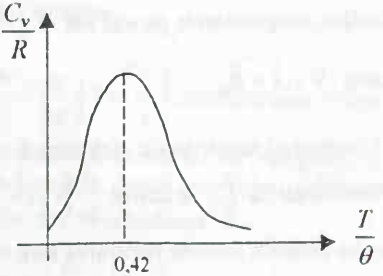
Se obține: $C_v = \frac{N(\Delta E)^2}{2kT^2ch^2\frac{\Delta E}{2kT}}$.

Pentru $T \to 0K$, $\frac{\Delta E}{kT} \to \infty$; $ch\frac{\Delta E}{2kT} \to \frac{e^{\frac{\Delta E}{2kT}}}{2}$

și $C_v = \frac{Nk}{T^2}\left(\frac{\Delta E}{k}\right)^2 e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$.

Introducând *temperatura caracteristică* θ definită de relația $\Delta E = k\theta$, se obține

$$C_v = R\left(\frac{\theta}{T}\right)^2 exp\left(-\frac{\theta}{T}\right);\ R = kN_A$$



BCU Cluj / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru $T \to \infty$, $ch^2 \frac{\Delta E}{2kT} \to 1$ şi $C_v = \frac{Nk}{T^2}\left(\frac{\Delta E}{k}\right)^2$ .Pentru $N = N_A$, $C_v = \frac{R}{2}\frac{\theta^2}{T^2} \approx \frac{1}{T^2}$.

Funcţia $C_v = C_v(T)$ admite un maxim pentru care $\frac{\partial C_v}{\partial T} = 0 \Rightarrow 2Tch\frac{\Delta E}{2kT} = 2\frac{\Delta E}{2k}ch\frac{\Delta E}{2kT}$

sau $coth\frac{\Delta E}{2kT} = \frac{\Delta E}{2kT}$ cu soluţia $\frac{\Delta E}{2kT} = 1{,}2 \Rightarrow \frac{\theta}{2T} = 1{,}2 \Rightarrow \frac{T}{\theta} \approx 0{,}42$.

După înlocuirea valorilor numerice în expresia pentru C_v, se obţine: $C_V = 3{,}9 \cdot 10^{-10} J \cdot K^{-1}$.

*

59.

1).Ecuaţia Poisson, se scrie: $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r \cdot \varphi) = 0 ; (\rho = 0)$. În urma integrării se obţine:

$$r\varphi = a + br \Rightarrow \varphi = \frac{a}{r} + b,$$

b fiind o constantă reper pentru potenţial.Rezultă $E = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{r^2} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{a}{r^2}\vec{n}_r$ în care $\vec{n}_r$ este versorul direcţiei $\vec{r}$ .Cum $a = \frac{q}{4\pi\varepsilon}$, obţinem $\varphi = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + b$.

2). $\frac{d^2(r\varphi_1)}{dr^2} = -\Lambda r \quad ; \quad \varphi_1 = -\frac{\Lambda}{6}r^2 + \frac{a}{r} + b$

Câmpul corespunzător $E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dr} = +\frac{\Lambda r}{3} - \frac{a}{r^2}$ şi va fi suma termenului repulsiv $\frac{\Lambda}{3} \cdot r$ cu termenul newtonian $-\frac{a}{r^2}$.

În cazul celălalt, $\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi_2) - \frac{r\varphi_2}{a^2} = 0$ din care $\varphi_2 = \frac{A}{r}exp\left(-\frac{r}{a}\right) + \frac{B}{r}exp\left(\frac{r}{a}\right)$,cu A şi B constante.Dacă $\lim_{r\to\infty} \varphi = 0$, în mod necesar $B=0$ şi $\varphi_2 = \frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, expresie în care recunoaştem potenţialul de distanţă finită de tip *Yukawa*.

*

*60.*Componentele vectorului $\vec{A}$ pe axele x,y şi z ale unui triedru cartezian, se scriu:

$$A_x = \frac{1}{2}(B_{oy}z - B_{oz}y); A_y = \frac{1}{2}(B_{oz}x - B_{ox}z); A_z = \frac{1}{2}(B_{ox}y - B_{oy}x)$$

Calculăm componentele pe axe ale $\nabla \times \vec{A}$ .Astfel $(\nabla \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_0, ...etc$.

Rezultă , $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}_0$.

*

61. Combinând condiţia de etalonare Lorentz cu relaţia de definiţie a potenţialului vector al lui Hertz notat cu $\vec{\Pi}$, se obţine $\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\vec{\Pi} + \varphi\right] = 0$ ceea ce înseamnă că $\nabla\vec{\Pi} + \varphi = const$

În regim variabil, această constantă este nulă şi $\varphi = -\nabla\vec{\Pi}$. Rezultă:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \nabla(\nabla\vec{\Pi}) = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aceste relații arată că vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$ în regim variabil se condiționează reciproc, generând o undă electromagnetică.

*

62. Deoarece curentul are componentă nenulă numai pe axa Oz se poate considera $A_r=A_\varphi=0$ în această ipoteză,

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi},\ B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r},\ B_z = 0$$

care comparate cu expresia B_φ din ipoteza de lucru, conduc la

$$A_z = \begin{cases} -\dfrac{\mu I}{4\pi R^2}r^2 + C & (r < R) \\ -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r + C' & (r > R) \end{cases}$$

Convențional vom accepta pe axa conductorului $C=0$, adică $A_z=0$ iar constanta C rezultă din condiția ca A_z să fie continuu pentru $r = R$. Se obține:

$$A_z = \begin{cases} -\dfrac{\mu I}{4\pi R^2}r^2, \text{ pentru } r < R \\ -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{r}{R} - \dfrac{\mu I}{4\pi}, \text{ pentru } r > R \end{cases}$$

*

63. Potențialul vector $\vec{A}$ va avea în acest caz componentele: $A_x=A_y=0;\ A_z=A_z(x,y)$.

Din relația $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ obținem $B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y}$, $\quad B_y = -\dfrac{\partial A_z}{\partial x}$, $\quad B_z = 0$.

Ecuațiile deferențiale ale liniiilor de forță se scriu: $\dfrac{dx}{B_x} = \dfrac{dy}{B_y} = \dfrac{dz}{B_z}$, sau în cazul nostru

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial A_z}{\partial y}} = -\frac{dy}{\dfrac{\partial A_z}{\partial x}} = \frac{dz}{0}$$

Rezultă că $z = const.$ este o integrală primă. Aceasta înseamnă că liniile de forță sunt conținute în plane $y = const. = C_1$.

O altă integrală primă rezultă din ecuația $\dfrac{\partial A_z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial A_z}{\partial y}dy = 0$ echivalentă cu ecuația

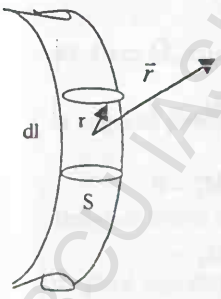
$$dA_z(x,y) = 0$$

sau

$$A_z(x,y) = const = C_2$$

Așadar liniile de forță coincid cu liniile de potențial vector constant.

*



64. Scriem $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \dfrac{\mu}{4\pi}\nabla \times \int_{V'} \vec{j}\dfrac{dv}{r} = \dfrac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \nabla \times \left(\dfrac{\vec{j}}{r}\right)$. Introducerea rotorului sub integrală este îndreptățită deoarece domeniul de integrare nu depinde de variabilele prin care acționează operatorul rotor, adică nu depinde de coordonatele punctului în care se calculează $\vec{B}$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{j}}{r} = \frac{1}{r}\nabla \times \vec{j} + \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \times \vec{j}\right)$$

Vectorul $\vec{j}$ depinde de coordonatele $\vec{r}'$ ale punctelor pe care se face

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

integrarea iar operatorul rotor se efectuează după coordonatele $\vec{r}$ ale punctului în care se calculează câmpul. Coordonatele $\vec{r}'$ şi $\vec{r}$ sunt aşadar independente. Rezultă,

$$\nabla \times \vec{j} = 0 \text{ şi cum } \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3},\ \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \times \vec{j} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{j} = \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3}$$

Se obţine $\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV$ şi $\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV$ relaţii ce exprimă legea Biot – Savart – La - place care permite calculul câmpului magnetic pentru o distribuţie dată a curenţilor. Dacă curenţii staţionari trec prin conductori suficient de subţiri $|\vec{j}| = const$ şi $dV = S \cdot dl$ astfel că,

$$\vec{j} dV = \vec{j} S dl = |\vec{j}| S d\vec{l} = I d\vec{l}$$

Se obţine $\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$ unde s-a notat cu L conturul liniar al curentului, iar cu S secţiunea tubului de curent.

*

65. Densitatea volumică de energie magnetică este dată de relaţia: $w_m = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{A}$.

În baza identităţii vectoriale $\nabla(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}\nabla \times \vec{A} - \vec{A}\nabla \times \vec{B}$ obţinem

$$\vec{H}\nabla \times \vec{A} = \nabla(\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{H} = \nabla(\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A}\vec{j};\ (\nabla \times \vec{H} = \vec{j})$$

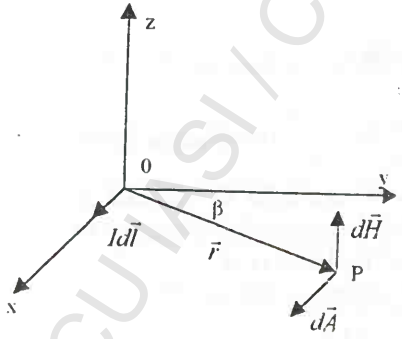
$$w_m = \frac{1}{2}\nabla(\vec{A} \times \vec{H}) + \frac{1}{2}\vec{A} \cdot \vec{j}$$

Integrând pe întregul volum al distribuţiei de curenţi, rezultă: $w_m = \frac{1}{2}\int_V \nabla(\vec{A} \times \vec{H}) dV + \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\vec{j} dV$

În baza identităţii $\int_V \nabla(\vec{A} \times \vec{H}) dV = \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) d\vec{S}$ ţinem seama că $|\vec{A}|$ se comportă ca $1/r^2$ iar $|\vec{H}|$ se comportă corespunzător ca $1/r^3$ astfel că dacă curenţii sunt distribuiţi în domenii finite, prima integrală din expresia energiei câmpului magnetic se anulează pentru r suficient de mare, rezultând $w_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\vec{j} dV$ şi cum $\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \vec{j}' \frac{dV'}{r}$ rezultă în definitiv $W_m = \frac{\mu}{8\pi}\int_V \frac{\vec{j}\vec{j}' dV dV'}{r}$, unde r reprezintă distanţa între elementele de volum dV şi dV'.

*

66. Potenţialul vector definit de elementul de curent $I\ d\vec{l}$ este: $d\vec{A} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi r}$.



În cazul problemei, $dA_x = \frac{\mu_0 I dx}{4\pi r}$. Folosim relaţia,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

şi obţinem

$$dB_x = (\nabla \times d\vec{A})_x = \frac{\partial}{\partial y} dA_z - \frac{\partial}{\partial x} dA_y = 0$$

$$dB_y = (\nabla \times d\vec{A})_y = \frac{\partial}{\partial z} dA_x - \frac{\partial}{\partial x} dA_z = 0$$

$$dB_z = (\nabla \times d\vec{A})_z = \frac{\partial}{\partial y} dA_y - \frac{\partial}{\partial y} dA_x =$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= -\frac{\partial}{\partial y} dA_x = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\mu_0 I dx}{4\pi\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mu_0 I dxy}{4\pi\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos\beta$$

Cum $\beta = \alpha - 90°$, rezultă $d\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi r^2} \sin\alpha$ care reprezintă ecuația Laplace pentru vid.

*

67.

1). Ecuația D'Alembert se scrie în cazul de față $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t^2} = 0$ cu $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$. Soluția generală a acestei ecuații este $\vec{A} = \vec{f}(x-ct) + \vec{g}(x+ct)$. Termenul *f(x–ct)* corespunde propagării în sensul pozitiv al axei Ox.

Condiția de etalon Lorentz este $\nabla\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$; Trecând la variabila $u=x-ct$ se obține $\frac{dA_x}{du} - c\varepsilon_0\mu_0 \frac{dV}{du} = 0$, ceea ce conduce prin integrare la $\varphi = cA_x$. Un calcul pe componente permite obținerea relației $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_0$, echivalentă cu $\vec{B} = \vec{n} \times \frac{d\vec{A}}{du}$. Astfel $\vec{B}$ se dovedește a fi transversal (ortogonal la direcția de propagare).

Se poate scrie $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Se obține astfel $E_x=0, E_y = c\frac{dA_y}{du}, E_z = c\frac{dA_z}{du}$ sau $\vec{E} = c\vec{B} \times \vec{n}$, recunoscându-se structura undei plane progresive.

Dacă se adoptă condiția de etalon Coulomb $\nabla\vec{A} = 0$, în cazul de față se obține $\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$ sau $\frac{\partial A_x}{\partial u} = 0$, care se integrează direct.

Se poate lua $A_x=0$. În această situație potențialul vector $\vec{A}$ este transversal.

2). Câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ se calculează (ținând seama că $\varphi = 0$) prin relațiile $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ și $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ceea ce conduce la $\vec{E} = c\frac{d\vec{A}}{du}, \vec{B} = \vec{n} \times \frac{d\vec{A}}{du}$. Câmpurile sunt deci transversale și se regăsește relația structurii undei plane progresive $\vec{B} = \vec{n} \times \frac{\vec{E}}{c}$.

*

68. Dacă $\vec{M}_0$ este uniform, un element de volum dV conține momentul $d\vec{M} = \vec{M}_0 dV$ și rămâne la originea potențialului vector $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{M} \times \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}_0 \times \vec{u}}{r^2} dV \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{M}_0}{4\pi} \times \iiint_{sferă} \frac{\vec{u} dV}{r^2}$.

Integrala evocă un câmp electrostatic în dependența de $\frac{1}{r^2}$; Înmulțim și împărțim membrul drept cu ε_0 și cu ρ, unde ρ este o constantă cu dimensiunile unei densități volumice de sarcină

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultă $\vec{A} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \vec{M}_0}{4\pi\rho} \times \iiint \frac{\rho \vec{u}\, dV'}{\varepsilon_0 r^2}$ sau $\vec{A} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \vec{M}_0}{\rho} \times \iiint_{sferă} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho \vec{u}\, dV'}{r^2} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \vec{M}_0}{\rho} \times \vec{E}^*$

und $\vec{E}^*$ este câmpul creat de o densitate volumică de sarcină uniform distribuită în domeniul V

Calculul lui $\vec{E}^*$ se face în electrostatică prin teorema Gauss.

a) interior $r < a$, $\vec{E}^*_{int} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$ şi $\vec{A}_{int} = \mu_0 \cdot \frac{\vec{M}_0 \times \vec{r}}{3}; \vec{M}_0$

b) exterior $r > a$, $\vec{E}^*_{ext} = \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$ şi $\vec{A}_{ext} = \frac{\varepsilon_0\mu_0\vec{M}_0}{\rho} \times \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r} = \mu_0 \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$

dacă $\vec{M} = \frac{4}{3}\pi a^3 \vec{M}_0$;

- În interior, $\vec{B}_{int} = \nabla \times \vec{A}_{int} = \frac{2\mu_0}{3}\vec{M}$ (câmpul este uniform).
- În exterior câmpul este cel al unui dipol magnetic de moment $\vec{M}$.

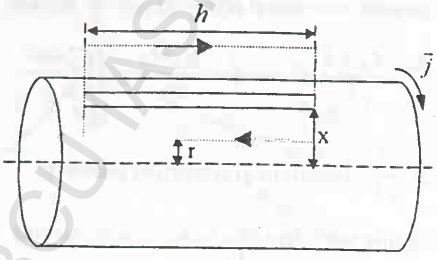
*

69. Analog problemei precedente $\vec{A} = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\rho}\vec{M} \times \vec{E}^*$ unde E^* este câmpul electrostatic creat de o densitate volumică uniformă de sarcină ρ repartizată uniform în volumul ocupat de vectorul $\vec{M}$ şi are valorile: $r < a$, $\vec{E}^* = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}$; $r > a$, $\vec{E}^* = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$. Vectorul $\vec{E}^*$ este radial, iar $\vec{M}$ ortogonal la axa Oz a cilindrului. Rezultă că $\vec{A}$ este coliniar cu această axă. Într-un plan perpendicular pe axa Oz luând direcţia lui $\vec{M}$ ca origine a unghiului polar, θ.

$A_{z\,int} = \mu_0 \frac{Mr\sin\theta}{2}$, $A_{z\,ext} = \frac{\mu a^2 M \sin\theta}{2r}$. Remarcând că $A_{z\,int} = \mu_0 \frac{My}{2}$ calculul lui $\vec{B}_{int}$ se face simplu în coordonate carteziene $\vec{B}_{int} = \nabla \times \left(A_{z\,int}\vec{k}\right) = \mu_0 \frac{\vec{M}}{2}$. La o distanţă $r > a$ de axa Oz $\vec{B}_{ext}$ se află de asemenea, într-un plan perpendicular pe Oz şi $\vec{B}_{ext} = \frac{\mu a^2}{2} \cdot \frac{2(\vec{M}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^4}$.

*

70. Conform figurii, curenţii de magnetizare sunt $\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M}$ şi $\vec{j}_{ms} = \vec{M} \times \vec{n}$;



$\vec{j}_m = -\frac{M_0}{a}\vec{l}_\theta; \vec{j}_{ms} = M_0\vec{l}_\theta$ ceea ce este echivalent cu o suprapunere de solenoizi coaxiali.

Dacă $\vec{M} = M(r)\vec{l}_z$ atunci $\nabla \times \vec{M} = -\left[\frac{\partial M_z}{\partial r}\right]\vec{l}_\theta$.

- Câmpul exterior este nul $r > a, \vec{B}_{ext} = 0$.
- Pentru $r < a$ pe baza teoremei Ampère

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

aplicată unui contur ca cel din figură $Bh=\mu_0 h\left[\int_r^a -\frac{M_0}{a}dx+M_0\right]=\mu_0 hM_0\frac{r}{a}$. Acest câmp este coliniar cu axa Oz. Pentru $r<a, \vec{B}_{int}=\mu_0\frac{r}{a}M_0\vec{l}_z$. La traversarea barei câmpul $\vec{B}$ suferă o discontinuitate de valoare $\mu_0\vec{j}_{s,m}\times\vec{l}_r$

*

71.

$\vec{B}_r=\left(\nabla\times\vec{A}\right)_r=\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}$; $\vec{B}_\theta=\left(\nabla\times\vec{A}\right)_\theta=\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}$; $\vec{B}_z=\left(\nabla\times\vec{A}\right)_z=$

$=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$. Vom lucra evident în coordonate cilindrice r,θ,z.

1). $\vec{E}=E\,\vec{e}_r$; $\vec{B}=B\,\vec{e}_\theta$. Ecuația Maxwell-Ampère se va scrie $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$;

$\oint_C\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\left[\int_S\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)d\vec{S}\right]$ unde C este un contur circular de rază r iar S suprafața cercului definit de C. $B(r,z,t)=\frac{\mu_0 I(z,t)}{2\pi r}$; 2). Pentru $b<r<a$, $\nabla\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$; $-\frac{\partial B}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}$;

$\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{dI(z)}{dz}e^{i\omega t}$; $E=\frac{j}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{dI(z)}{dz}e^{i\omega t}$. 3). $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; $\frac{\partial E}{\partial z}=-\frac{\partial B}{\partial t}$;

$\frac{j}{2\pi\varepsilon_0 r\omega}\frac{d^2I}{dz^2}e^{i\omega t}=-\frac{\mu}{2\pi r}I(z)e^{i\omega t}\cdot i\omega$; $\frac{d^2I}{dz^2}=-\varepsilon_0\mu_0{}^2I(z)$; $I(z)=I_0e^{-ikz}+I_0'e^{ikz}$, $z\to\infty$;

$I_0'=0$ cu $k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=\frac{\omega}{c}\Rightarrow I(z,t)=I_0e^{i(\omega t-kz)}$. 4). Vectorul Poyinting este o expresie pătratică, ce adoptă formele reale pentru E și B. $E=\frac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 rc}\cos(\omega t-kz)$; $B=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\cos(\omega t-kz)$;

$\vec{Y}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}=\frac{I_0^2}{4\pi^2r^2\varepsilon_0 c}\cos^2(\omega t-kz)\vec{e}_z$. Fluxul Φ *al* vectorului Poynting se calculează decupând o secțiune $z=const.$ din cablu în zone circulare de rază r și lărgime dr. Elementul de suprafață dS delimitat de această zonă este $dS=2\pi r\,dr$. Rezultă,

$$\Phi=\frac{I_0^2}{4\pi^2\varepsilon_0 c}\cos^2(\omega t-kz)\cdot 2\pi\int_a^b\frac{r\,dr}{r^2}=\frac{I_0^2}{2\pi\varepsilon_0 c}\cos^2(\omega t-kz)\ln\frac{b}{a}.$$

Media în timp $\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t-kz)dt=\frac{1}{2}$ astfel că puterea medie transportată de acest flux, se va scrie $\overline{P}=\frac{I_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\ln\frac{b}{a}=Z\cdot I_{ef}^2$. Cum $I_{ef}=\frac{I_0}{\sqrt{2}}$, rezultă expresia impedanței $Z=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c}\ln\frac{b}{a}$.

BCU IAȘI - CETITEA - UNIVERSITY LIBRARY

72. Diferențele de fază generate de penele compensatorului, sunt $\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} d_1 (n_e - n_0)$ și $\Delta\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} d_2 (n_e - n_0)$ astfel că ținând seama că axele optice ale celor două prisme ale compensatorului sunt perpendiculare, raza ordinară provenind din prima prismă devine extraordinară pentru cealaltă prismă și invers. Rezultă un defazaj total :

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2)(n_e - n_0) = \frac{2\pi}{3} \text{ radiani.}$$

Se obține $d_1 - d_2 = \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{1}{n_e - n_0}$, din care rezultă $d_2 = 1{,}98\ mm$.

*

73. Datorită compensării diferenței de drum, fasciculele care se suprapun sunt în fază și interferența nu se produce. Cu toate acestea, radiația care străbate lama semiundă este un amestec de radiații polarizate circular.

*

74. Interferometrul Michelson se comportă în cadrul definit de ipotezele enunțate în problemă ca dispozitivul prezentat în problemele anterioare. Se poate scrie:

$$L = 1000\lambda; \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L} = 2{,}7\ \mathring{A}; \quad \tau_c = \frac{L}{c} = 2 \cdot 10^{-12} s$$

Rezultă, $\Delta\nu = \frac{1}{\tau_c} = 5 \cdot 10^{11} Hz$

*

75.

a).Imaginile sursei S sunt virtuale. Dacă unghiurile de incidență și emergență sunt foarte mici, $r_1 \cong r_2 = r \Rightarrow 2r = (r_1 + r_2) = \alpha$, iar unghiul de deviație minimă al prismei, $\delta = \alpha = 2r$. Avem de asemenea:

$$n = \frac{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cong \frac{\frac{\alpha+\delta}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha+\delta}{\alpha} \text{ și } \delta = (n-1)\alpha = \theta$$

$$tg\theta = \frac{d}{2l} \cong \theta \Rightarrow l = \frac{d}{2\theta} = \frac{d}{2(n-1)\alpha} \cong 20cm.$$

b) $tg\theta \cong \sin\theta \Leftrightarrow \frac{\Delta}{d} = \frac{x_k}{L-l}; \Delta = \frac{x_k \cdot d}{L-l} = k\lambda$ *pentru maxim*, $x_k = k\frac{L-l}{d} \cdot \lambda$.

Interfranja va fi: $i = x_{k+1} - x_k = \frac{L-l}{d}\lambda = \frac{80}{0{,}35} \cdot 7 \cdot 10^{+2} nm = \frac{80}{5} \cdot 10^{4} nm = 16 \cdot 10^{-5} m = 0{,}16mm$.

*

76.

a).Din figură se observă că $d = 2Sl$ unde S este unghiul de deviație minimă al razelor prin prismă. Deoarece $\delta = A(n-1)$ rezultă că $d = 2lA(n-1)$.

b).Folosim relația: $i = \frac{L-l}{d}\lambda = \frac{L-l}{2l(n-1)A}\lambda$ și obținem $x_k = k \cdot i = k\frac{(L-l)\lambda}{2l(n-1)A}$.

*

77.

a).Imaginea S_2 se află în punctul în care s-ar fi deplasat imaginea S_1 la rotirea oglinzii 1 cu unghiul α. La rotirea unei oglinzi plane cu unghiul α, raza reflectată se rotește cu 2α.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b).Sursa S ca şi sursele virtuale S_1 şi S_2 se află pe cercul cu centrul în O,intersecţia muchiei oglinzilor cu planul surselor. Deci $l \cong 2\alpha r$ ($OS \equiv OS_1 \equiv OS_2 \equiv r$).

c).Interfranja va ţine seama de dispunerea surselor în raport cu dreapta OA:

$$i = \frac{\lambda}{l} L \quad \text{în care} \quad L = L_0 + r \quad \text{şi} \quad l \cong 2\alpha r$$

d).Efectuând calculele, rezultă $\alpha = 9'10''$.

e).Efectuând calculele, rezultă $a = 2,8nm$.

*

78.

a).În cazul vibraţiei monocromatice sau când sursa radiază o serie de linii spectrale suficient de distanţate în frecvenţă, sistemele de franje corespunzătoare vor putea fi observate separat, ele având interfranje diferite: $i = \frac{L_0 + r}{2\alpha r}\lambda$.

Din condiţia de obţinere a maximelor $a\frac{2\alpha r}{L_0 + r} = k\lambda$ se constată că în centrul figurii de interferenţă ($k=0$) maximele de ordin zero se suprapun, rezultând o franjă centrală albă.

$$i_{violet} = \frac{L_0 + r}{2\alpha r}\lambda_{violet}$$

$$i_{rosu} = \frac{L_0 + r}{2\alpha r}\lambda_{rosu}$$

şi în general, $i_{vi} < i_{albastru} < \ldots\ldots\ldots < i_{rosu}$.

În locul minimului unei culori se formează maximul culorii cu lungimea de undă imediat mai mică. Începând cu violetul care are interfranja cea mai mică,între franja centrală şi franja roşie se formează franje colorate.

b).Considerând intervalul spectral cuprins între λ şi $\lambda + \Delta\lambda$ în care emite sursa, se poate pune condiţia de suprapunere a extremităţilor intervalului: $k(\lambda + \Delta\lambda) = (k+1)\lambda$

Rezultă $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{<\lambda>}{\Delta\lambda} = \frac{550,0}{100,0} = 5,5$. Începând cu ordinul 5-6 lumina nu mai este vizibilă.

*

79.

$$\delta = 2nd\cos i - \lambda/2 \qquad i = \frac{\pi}{2} - \alpha = 60^\circ$$

a)

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \qquad \cos r = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \delta = 1224,22 \cdot 10^{-5} m$$

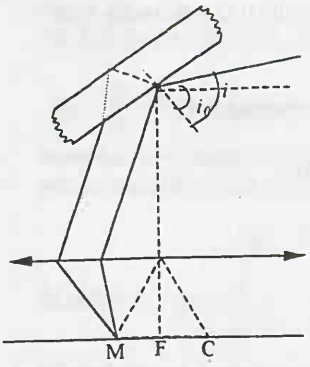
b) $d' = \frac{d}{\cos r} \cdot \sin(i - r) = 2,57 \cdot 10^{-3} m$

c) *Din* ΔOFB *avem* $tgi = \frac{S}{f} \Rightarrow f = \frac{S}{tgi} = 34,68mm$

*

80. Diferenţa de drum în punctul M este $\delta = 2ne\cos r + \lambda/2 = (2e\sqrt{n^2 - \sin^2 i}) + \lambda/2$. Se vor

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



observa franje luminoase pentru $\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (k+1/2)\lambda / 2l$ şi franje întunecoase pentru $\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = k\lambda / 2e$. Diferenţa de drum variază cu unghiul de incidenţă:

$$\delta d = [-2e \sin i \cos i / \sqrt{n^2 - \sin^2 i}\,]di$$

Interfranja unghiulară este Δi, pentru $\Delta\delta = \lambda$;

$$\Delta i = \lambda\sqrt{n^2 - \sin^2 i} / (2e \sin i \cos i)$$

În planul focal al lentilei, interfranja va fi $\delta x = f\Delta i$. În apropierea unghiului, $i = i_0 + \pi/4$, obţinem $\Delta i = 4{,}2 \cdot 10^{-2}$, deci $\delta x = 1{,}26mm$.

Iluminată cu fasciculul convergent, lama formează în planul focal al lentilei, inele de egală înclinare cu centrul în F.

*

*81.*a). $N = \dfrac{d}{i} = 150 franje$

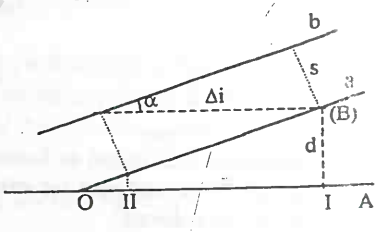
b). $i = \lambda / 2n\alpha \Rightarrow \alpha \cong \lambda / 2in = 2 \cdot 10^{-4} rad.$

*

82.

a) La iluminarea penei în poziţia OA se formează un anumit sistem de franje. În impul deplasării lamei (B), franjele se deplasează către vârful penei, astfel încât franja din I corespunde grosimii d a penei în poziţia "a" se va găsi în II corespunzând aceleiaşi rosimi d pentru poziţia "b". Avem:

$$s = \Delta i \sin\alpha \cong \alpha\Delta i$$



b).Deplasarea minimă a franjei ce se poate aprecia este:

$$\Delta i = \frac{1}{4} i \text{ unde } i = \frac{\lambda}{2tg\alpha} \cong \frac{\lambda}{2\alpha}$$

Rezultă $s_{min} = \alpha \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\lambda}{2\alpha} = \dfrac{\lambda}{8}$ Deci nu se pot pune în evidenţă deplasări mai mici de $\lambda/8$, adică $s_{min} = 62{,}5nm$.

c).Micşorarea unghiului α duce la o mărire a interfranjei, astfel încât: $tg\alpha = \dfrac{\lambda}{2i}$.

Măsurând pentru diverse unghiuri interfranja se poate determina unghiul penei. Micşorarea unghiului penei duce la o situaţie în care tot câmpul interferenţial, adică toată lungimea l a penei să fie ocupată din $\dfrac{1}{4}$ din interfranjă. O micşorare ulterioară a unghiului α al penei nu mai poate fi pusă în evidenţă; $tg\alpha = \dfrac{\lambda}{2i} \Rightarrow tg\alpha_{min} = \dfrac{\lambda}{8l}$. Această relaţie constituie condiţia de paralelism optic dintre cele două suprafeţe.

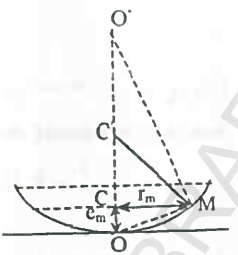
d).Se pot pune în evidenţă deformaţiile suprafeţei de cercetat luând ca etalon o altă suprafaţă şi măsurând interfranje (denivelările $\Delta < \lambda/8$ nu pot fi măsurate).

*

83. a) Franjele de interferenţă (inelele întunecoase şi luminoase) se produc prin interferenţa razelor reflectate pe faţa convexă a lentilei cu razele reflectate pe suprafaţa plană a lamei de sticlă. Se produc maxime şi minime corespunzând inelelor luminoase şi intunecate.

BUCUREŞTI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) Fie MC= r_m raza celui de al m-lea inel întunecat. Aplicând teorema înălțimii în $\Delta OMO'$, avem:



$$r_m^2 = e_m(2R - e_m)$$

Dar $e_m << 2R \Rightarrow r_m^2 \approx 2Re_m$.

Diferența de drum dintre cele două raze reflectate este în cazul incidenței normale

$$\delta = 2ne_m + \frac{\lambda}{2} = 2e_m + \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1 \text{ pentru aer})$$

Pentru ca inelul al m-lea să fie întunecat, trebuie ca

$$\delta = 2e_m + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{sau} \quad 2e_m = m\lambda$$

Se obține , $r_m = \sqrt{R \cdot 2e_m} = \sqrt{mR\lambda}$ $\qquad m = 0,1,2,3,...$

c).Procedând în mod analog ca la punctul b) se pot scrie relațiile $r_n^2 = 2Re_n$; $\delta = 2e_n + \frac{\lambda}{2}$.

Pentru ca inelul al n-lea să fie luminos, trebuie ca:

$$\delta = 2e_n + \frac{\lambda}{2} = 2n\frac{\lambda}{2} \text{ sau } 2e_n = (2n-1)\cdot\lambda/2 \Rightarrow r_n = \sqrt{(2n-1)\frac{R\lambda}{2}}; \quad n = 1,2,3,...$$

d).Pentru $m=0$, $r_m=0$ (inelul central).

e).Se pot scrie relațiile: $r_2 = \sqrt{\frac{3}{2}R\lambda}$; $r_9 = \sqrt{9R\lambda}$; $r_3 = \sqrt{\frac{5}{2}R\lambda}$; $r_{10} = \sqrt{10R\lambda}$ .Obținem,

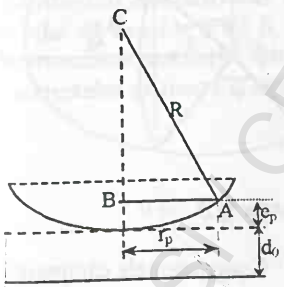
$$\begin{cases} r_3 - r_2 = l \\ r_{10} - r_9 = l' \end{cases} \Rightarrow \frac{l}{l'} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}} \Rightarrow l' = 0,4l$$

*

84. $\delta = 2nd - \frac{\lambda}{2} = k\lambda$,etc.

*

85.



a) Diferența de drum dintre cele 2 raze reflectate, ce conduc la interferență este (pentru inelul p): $\Delta p = 2(d_0 + e_p) + \frac{\lambda}{2}$

unde $2e_p = \frac{r_p^2}{R}$. Deci $\Delta p = 2d_0 + \frac{\lambda}{2} + \frac{r_p^2}{R}$ și $\Delta q = 2d_0 + \frac{\lambda}{2} + \frac{r_q^2}{R}$.

Pentru inele luminoase – de exemplu - $\Delta p = p\lambda$ și $\Delta q = q\lambda$.

Scăzând relațiile anterioare se obține relația cerută.

b).Prin dilatare h_0 trece în

$$h = h_0(1_0 + \alpha\Delta t) \quad si \quad d_0 \to d = d_0 - h_0\alpha\Delta t .$$

Vizualizând inelul p, înainte de dilatare: $p\lambda = 2d_0 + \frac{\lambda}{2} + \frac{r_p^2}{R}$ iar după dilatare $q\lambda = qd + \frac{\lambda}{2} + \frac{r_p^2}{R}$.

Prin scăderea relațiilor rezultă $(p-q)\lambda = 2(d_0 - d) = 2h_0\alpha\Delta t \Rightarrow \alpha = \frac{(p-q)\lambda}{2h_0\Delta t} = 1,2\cdot 10^{-5} grad^{-1}$.

*

86. $E_0 = E\sin 45^0$; $E_e = E\cos 45^0$. Analizorul va lăsa să treacă componentele :

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E_{Ac} = E\sin 45^0 \cos 45^0$$

$$E_{Ao} = E\cos 45^0 \sin 45^0$$

Aceste componente sunt defazate cu $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ unde : $\delta = (n_e - n_0)d = k_{cel}E_{cel}^2 \lambda d$, deci

$$\varphi = 2\pi E_{cel}\left(\frac{U}{l}\right)^2 \cdot d = 40\pi$$

şi lama va acţiona *ca o lamă undă*. Intensitatea transmisă va fi nulă.

*

87. Mediul omogen şi izotrop este descris de ecuaţiile:

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \nabla \vec{B} = 0 \qquad \vec{j} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \dot{\vec{D}} \qquad \nabla \vec{D} = 0 \qquad \rho = 0$$

Definim *vectorul Hertz* prin relaţia $\vec{A} = \varepsilon\mu\dot{\vec{Z}}$, $\vec{A}$ fiind potenţialul vector. Avem $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ şi $\vec{E} = -\nabla\varphi - \dot{\vec{A}}$. Rezultă $\vec{B} = \varepsilon\mu\nabla \times \dot{\vec{Z}}$ şi $\vec{E} = -\nabla\varphi - \varepsilon\mu\ddot{\vec{Z}}$. Obţinem,

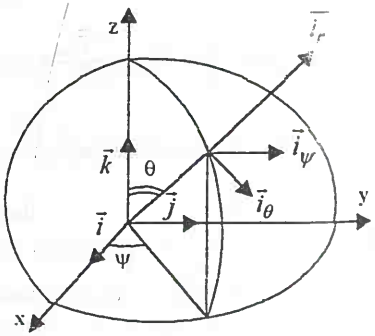
$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon\mu\dot{\vec{E}} = \nabla \times \left(\nabla \times \dot{\vec{Z}}\right) = -\left(\nabla\dot{\varphi} + \varepsilon\mu\ddot{\vec{Z}}\right)$ sau $\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \times \left(\nabla \times \vec{Z}\right) + \nabla\varphi + \varepsilon\mu\ddot{\vec{Z}}\right] = 0.$

Cum φ este arbitrar, putem considera $\varphi = \nabla\vec{Z}$ şi $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{Z}\right) - \nabla \cdot \nabla\vec{Z} + \varepsilon\mu\ddot{\vec{Z}} = 0$ sau, echivalent $\Delta\vec{Z} - \varepsilon\mu\ddot{\vec{Z}} = 0$. Rezultă $\vec{E} = \Delta\dot{\vec{Z}} - \varepsilon\mu\ddot{\vec{Z}}$. Din acest moment, putem descrie câmpul electromagnetic prin vectorul Hertz, $\vec{Z}$.

*

88. Folosim relaţia opţională pentru alegerea potenţialului φ : $\varphi = -\nabla\vec{Z}$ din care deducem că în acest caz vectorul lui Hertz are componente numai în lungul direcţiei Oz. Expresia acestuia rezultă din expresia potenţialului creat de dipolul $\vec{p}$:

$$Z_z = Z - \frac{1}{4\pi\varepsilon r}p_0 e^{-i(\omega t - kr)}$$



Rezultă folosind şi relaţia de definiţie $\vec{A} = \varepsilon\mu\dot{\vec{Z}}$

$$A_z = A - \varepsilon\mu\frac{\partial Z}{\partial t} = -\frac{i\mu\omega}{4\pi r}p_0 e^{-i(\omega t - kr)}$$

Scriem vectorul $\vec{A}$ în coordonate sferice r, θ, ψ :

$$\vec{A} = A_z\vec{k} = A_r\vec{i}_r + A_\varphi\vec{i}_\varphi + A_\psi\vec{i}_\psi .$$

Înmulţim scalar cu $\vec{i}_r, \vec{i}_\theta$ şi $\vec{i}_\psi$ şi obţinem $A_r = A\cos\theta; A_\theta = -A\sin\psi$ şi $A_\psi = 0$.

Potenţialul scalar este $\varphi = -\nabla\vec{Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\cos\theta\, p_0 e^{-i(\omega t - kr)}$. Componentele câmpurilor $\vec{E}, \vec{H}$ se obţin din ecuaţiile : $\vec{E} = -\nabla\varphi - \dot{\vec{A}}$ şi $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

Exprimăm gradientul şi rotorul în coordonate sferice şi proiectăm relaţiile pe axe. Obţinem :

$$E_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t}; E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t}; E_\psi = 0$$

$$H_r = 0; H_\theta = 0; H_\psi = \frac{1}{\mu r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial\theta}\sin\theta$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Înlocuind în aceste expresii obținute pentru A_r și φ, rezultă

$$E_r = -\frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\varepsilon r}\left[\left(\frac{1}{r} - ik\right)^2 + \frac{1}{r^2} + \mu\omega^2\varepsilon\right]e^{-i(\omega t - kr)} = -\frac{p_0 \cos\theta}{2\pi\varepsilon r}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)e^{-i(\omega t - kr)}, \left(k^2 = \mu\omega^2\varepsilon\right)$$

$$E_\theta = \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon r^2}\left(\frac{1}{r} - ik - \mu\varepsilon\omega^2 r\right)e^{-i(\omega t - kr)} \quad ; \quad H_\psi = \frac{-\omega}{4\pi r}\left(\frac{i}{r} + k\right)p_0 \sin\theta \cdot e^{-(\omega t - kr)}$$

$$E_\psi = 0; H_r = H_\theta = 0$$

*

89. Din ecuațiile Maxwell, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ și $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{A}\right) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

deducem $\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$ ceea ce înseamnă că vectorul sumă din paranteze derivă dintr-un potențial scalar φ: $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$ echivalentă, cu $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$.

Pe de altă parte, $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ echivalentă, cu: $\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\right)$

Se obține încă, $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \varepsilon_0\mu_0 \nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \mu_0 \vec{j}$.

Cum $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$ iar $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, rezultă: $-\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla\left(\nabla \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \mu_0 \vec{j}$.

Pentru ca acestă ecuație să reprezinte ecuația unei unde $\Box \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$, se impune în mod necesar ecuația $\nabla \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ numită *condiție de etalonare Lorentz*. Trecerea de la referențialul inerțial fix S la referențialul inerțial mobil S' care se deplasează cu viteza v paralel cu axa Ox a lui S, se reflectă în comportarea unei funcții $f(x,t)$ raportată la S prin intermediarul corelației între coordonatele x din S și coordonatele x' din S' și prin corelația momentelor de timp t și t' măsurate în cele două sisteme.

$$f(x,t) = f\left[x'(x,t) \quad ; \quad t'(x,t)\right] = f\left[\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

Se obține: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)$.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi relaţiile ce marchează trecerea inversă :

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right); \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right); \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}; \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

Ţinând seama de aceste transformări, se obţine pentru condiţia de etalonare:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial A_x}{\partial t'}\right) + \frac{\partial A_y}{\partial y'} + \frac{\partial A_z}{\partial z'} +$$

$$+ \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - v\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{A_x - \frac{v}{c^2}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \frac{\partial A_y}{\partial y'} + \frac{\partial A_z}{\partial z'} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\varphi - vA_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) =$$

$$= \frac{\partial A_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial A_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial A_{z'}}{\partial z'} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial t'}$$

Obţinem în definitiv prin identificare,

$$A_{x'} = \frac{A_x - \frac{v}{c^2}\varphi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; A_{y'} = A_y; A_{z'} = A_z; \varphi' = \frac{\varphi - vA_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

*

90. Folosim ecuaţia lui Maxwell $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ şi condiţia de etalon $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ pe care le vom scrie pe componente în cele două referenţiale inerţiale S şi S', ţinând seama de transformările derivatelor parţiale. Obţinem:

$$B_{y'} = \frac{\partial A_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial A_{z'}}{\partial x'} = \frac{\partial A_{x'}}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_x - \frac{v^2}{c^2}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)A_x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}B_y - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{v}{c^2}\cdot(-E_x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_x\right).$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultă : $B_{y'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_x\right)$. Analog, se obțin relațiile : $B_{x'} = B_x; B_{z'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_x\right)$

care se pot sintetiza sub forma vectorială: $\vec{B}' = \frac{\vec{B} - \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Pentru transformarea vectorului câmp electric, folosim condiția de etalonare scrisă în S',

$\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} - \nabla\varphi'$. Procedând analog, obținem relațiile : $E_{x'} = E_x; E_{y'} = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}}; E_{z'} = E_z$

care se regăsesc în ecuația vectorială $\vec{E}' = \frac{\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Trecerea inversă este definită de relațiile

$\vec{B} = \frac{\vec{B}' + \left(\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$ și $\vec{E} = \frac{\vec{E}' - \vec{v}\times\vec{B}'}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

*

91. Vom stabili de data aceasta relațiile de transformare cu ajutorul matricei transformărilor Lorentz pentru cuadrivectorul potențial $\vec{\Phi}_v : \left(A_x, A_y, A_z, \frac{i}{c}\varphi\right)$.

pornind de la ecuația $\nabla\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, echivalentă cu $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial\left(\frac{i}{c}\varphi\right)}{\partial(ict)} = 0$

Obținem : $\begin{pmatrix} \Phi_1' \\ \Phi_2' \\ \Phi_3' \\ \Phi_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix}$ sau pe componente :

$$\Phi_1' = \alpha\Phi_1 + i\alpha\beta\Phi_4 \Rightarrow A_{x'} = \frac{A_x - \frac{v}{c^2}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}; A_{y'} = A_y; A_{z'} = A_z \text{ și } \rho' = \frac{\rho - vA_x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

*

92. Cuadrivectorul număr de undă $\vec{K}_v$ are componentele :

$$K_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha_1;\ K_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha_2;\ K_3 = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha_3;\ K_4 = i\frac{2\pi}{\lambda}$$

Modulul său, este nul : $K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + K_4^2 = 0$.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Transformările Lorentz, îl fac invariant :

$$\begin{pmatrix} K_1' \\ K_2' \\ K_3' \\ K_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix}$$

Rezultă $K' = -i\alpha\beta K_1 + \alpha K_4 \Rightarrow \lambda' = \dfrac{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\alpha_1}$ care exprimă tocmai efectul Doppler relativist . Relația se poate scrie funcție de frecvență : $\nu' = \nu\dfrac{1-\beta\cos\alpha_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ sau $\nu' = \nu\dfrac{1+\beta\cos\alpha_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ după cum sursa se depărtează, respectiv se apropie de observator, α_1 este unghiul între direcția de propagare a undei şi axa Ox.Pentru $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\nu' = \dfrac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}$ care exprimă legea efectului Doppler transversal, relativist.

*

*93.*Folosim relațiile de transformare ale vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ astfel că, putem scrie :

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = E_{x'}B_{x'} + E_{y'}B_{y'} + E_{z'}B_{z'} = E_xB_x + \alpha^2\left(E_y + vB_z\right)\cdot\left(B_y - \frac{v}{c^2}E_z\right) +$$

$$+\alpha^2\left(E_z - vB_y\right)\left(B_z + \frac{v}{c^2}E_y\right) = E_xB_x + \alpha^2\left(E_yB_y - \frac{v}{c^2}E_yE_z + vB_yB_z - \frac{v}{c^2}B_zE_z\right) +$$

$$+\alpha^2\left(E_zB_z - vB_yB_z + \frac{v}{c^2}E_zE_y - \frac{v}{c^2}E_yB_y\right) = E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z = \vec{E}\cdot\vec{B}$$

Analog, se verifică invarianța expresiei $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$.

*

*94.*Matricea componentelor tensorului $\Psi_{\mu\nu}$

$$\begin{pmatrix} 0 & B_x & -B_y & -\dfrac{i}{c}E_x \\ -B_x & 0 & B_x & -\dfrac{i}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\dfrac{i}{c}E_z \\ \dfrac{i}{c}E_x & \dfrac{i}{c}E_y & \dfrac{i}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

arată că $\frac{i}{c}E_x = \Psi_{41} = -\Psi_{14}$ din care rezultă

$$E_x = -ic\Psi_{41} = ic\Psi_{14}$$
$$E_y = -ic\Psi_{42} = ic\Psi_{24}$$
$$E_z = ic\Psi_{43} = ic\Psi_{34}$$

Obținem , $\overline{E^2} = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = -c^2\left(\Psi_{14}^2 + \Psi_{24}^2 + \Psi_{34}^2\right) = -c^2\left(\Psi_{41}^2 + \Psi_{42}^2 + \Psi_{43}^2\right)$

și observând analog că $B_x = \Psi_{23} = -\Psi_{32}\,; B_y = \Psi_{31} = -\Psi_{13}\,; B_z = \Psi_{12} = -\Psi_{21}$,rezultă

$\overline{B^2} = \frac{1}{2}\left(\Psi_{11}^2 + \Psi_{12}^2 + \Psi_{13}^2 + \Psi_{21}^2 + \Psi_{22}^2 + \Psi_{23}^2 + \Psi_{31}^2 + \Psi_{32}^2 + \Psi_{33}^2\right)$ astfel, că $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = -\frac{c^2}{2}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\Psi_{\mu\nu}^2$

*

95. Componentele cuadritensorului $\Theta'_{\mu\nu}$ se obțin cu ajutorul matricii transformărilor Lorentz din componentele cuadritensorului $\Theta_{\mu\nu}$. Rezultă :

$$\begin{pmatrix} 0 & H_{z'} & -H_{y'} & -icD_{x'} \\ -H_{z'} & 0 & 0 & -icD_{y'} \\ H_{y'} & 0 & 0 & -icD_{z'} \\ icD_{x'} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & -i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}$$

Se obțin relațiile de transformare :

$$H_{z'} = \alpha H_z + (-i\alpha\beta)(icD_y) = \alpha(H_z + vD_y)$$
$$-H_{y'} = \alpha(-H_y) + (-i\alpha\beta)(icD_z) = \alpha(H_y - vD_z)$$

și continuând, se obțin și celelalte relații ;

$$H_{x'} = H_x\,; D_{y'} = \alpha\left(D_y + \frac{v}{c^2}H_z\right); D_{z'} = \alpha\left(D_z - \frac{v}{c^2}H_y\right); D_{x'} = D_x$$

Se obțin și relațiile de trecere de la S' la S :

$$H_x = H_{x'}$$
$$H_y = \alpha(H_{y'} + vD_{z'})$$
$$H_z = \alpha(H_{z'} - vD_{y'})$$

și

$$D_x = D_{x'}$$
$$D_y = \alpha\left(D_{y'} - \frac{v}{c^2}H_{z'}\right)$$
$$D_z = \alpha\left(D_{z'} + \frac{v}{c^2}H_{y'}\right)$$

Aceste relații se pot scrie sub formă vectorială

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{H}' = \frac{\vec{H} - \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ şi } \vec{D}' = \frac{\vec{D} + \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ respectiv } \vec{H} = \frac{\vec{H}' + \vec{v} \times \vec{B}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ şi } \vec{D} = \frac{\vec{D}' - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

*

96. Invarianța expresiei $\vec{E}\vec{D} - \vec{H}\vec{B}$ se stabilește în baza relațiilor de transformare a vectorilor implicați, la o schimbare a referențialului inerțial.

Ținând seama de matricile tensorilor $\Psi_{\mu\nu}$ și $\Theta_{\mu\nu}$ se obține :

$$\vec{E} \cdot \vec{D} = -\frac{1}{2}\left(\Psi_{14}\Theta_{14} + \Psi_{41}\Theta_{41} + \Psi_{24}\Theta_{42} + \Psi_{42}\Theta_{42} + \Psi_{34}\Theta_{43} + \Psi_{43}\Theta_{34}\right) \text{ și}$$

$$\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}\left(\Psi_{23}\Theta_{23} + \Psi_{34}\Theta_{32} + \Psi_{13}\Theta_{13} + \Psi_{31}\Theta_{31} + \Psi_{12}\Theta_{12} + \Psi_{21}\Theta_{21}\right) \text{ și cum}$$

$$\Psi_{11} = \Theta_{11} = \Psi_{22} = \ldots = \Theta_{44} = 0 \text{ rezultă , } \vec{E}\vec{D} - \vec{H}\vec{B} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\Psi_{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu}$$

*

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBLIOGRAFIE

1. I.Barbur, D.Strugaru – *Culegere de probleme de electricitate şi magnetism* – Editura Di - dactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.
2. G.Cone – *Probleme rezolvate de fizică*, vol .I - Litografia I.P.B. – Bucureşti 1979.
3. C.Cioacă, C.Stănescu, M.Fifirig – *Probleme rezolvate de electricitate*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1997.
4. T.Creţu – *Fizica – Curs Universitar*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1996.
5. Tr.Creţu, Cr.Florea, I.Ivanov – *Fizica* – partea I-a, Litografia I.P.B. – Bucureşti, 1980.
6. Tr.Creţu, I.Ivanov , P.Ştiucă – *Fizica* – partea II-a, Tipografia I.P.B.-Bucureşti,1982.
7. L.Daniello, C.Florea, I.Ivanov, Gh.Macarie, P.Ştiucă – *Culegere de probleme de fizică* – Litografia I.P.B., Bucureşti, 1986.
8. V.Fara, P.Suciu – *Probleme de fizică pentru studenţii ingineri* vol. II, Litografia I.P.B., Bucureşti, 1972.
9. D.Grobnic – *Culegere de probleme de optică electromagnetică* – Litografia U.P.B., Bu - cureşti, 1993.
10. M. Ignat – *Întrebări şi exerciţii de termodinamică şi fizică statistică* – Editura ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.
11. Ivanov,I. -"*Capitole fundamentale ale fizicii clasice*- **Bazele teoretice** -"-vol.I , Editura Matrix-Rom, Bucureşti, 1999.
12. Ivanov,I. -"*Capitole fundamentale ale fizicii clasice*-**Extinderi teoretice şi aplicaţii**"- vol.II , Editura Matrix-Rom, Bucureşti, 1999.
13. Ivanov,I. - " ***Fizică clasică*** " - , în curs de apariţie la Editura POLITEHNICA –PRESS, Bucureşti.
14. N.Gherbanovschi, N.Marinescu, D.Gheorghiu – *Probleme de electromagnetism şi elec - trotehnică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.
15. V.Novacu – *Culegere de probleme de electrodinamică*, Ed.Didactică, Bucureşti, 1964.
16. I.M.Popescu, D.Iordache, Şt.Tudorache, M.Stan, V.Fara – *Probleme rezolvate de fizică*, vol.I, Bucureşti, 1984.
17. I.M.Popescu, D.Iordache, V.Fara, M.Stan, A.Lupaşcu – *Probleme rezolvate de fizică*, vol.II – Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.
18. M.Stan, St.Tudorache – *Probleme rezolvate de fizică*, vol.II , Litografia I.P.B., Bucureşti, 1982.
19. Şt.Tudorache, M.Stan – *Probleme rezolvate de fizică*, vol. I - Litografia I.P.B. – Bucureşti 1981.

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

25.GENEZA STRUCTURILOR MATERIALE SI EFECTE DE CIMP, Marius Arghirescu (Oficiul de Stat pentru Inventii si Marci), pret:56 lei

26.GEOMETRODINAMIICA DEFORMARILOR SPATIO-TEMPORALE CU APLICATII IN ASTROFIZICA SI COSMOLOGIE, Ana-Camelia Pirghie (Universitatea Stefan cel Mare Suceava), pret:32 lei

27.INDRUMAR DE LABORATOR. FIZICA ATOMULUI SI FIZICA SOLIDULUI, Maria Honciuc (Universitatea Politehnica Bucuresti), pret:28 lei

28.LUCRARI EXPERIMENTALE DE OPTOELECTRONICA, FIZICA SI INGINERIA LASERILOR, Niculae N. Puscas (Universitatea Politehnica Bucuresti), pret:43 lei

29.MECANICA CUANTICA- EDITIA A 2-A REVAZUTA, Ileana Creanga (Universitatea Politehnica Bucuresti), pret:42 lei

30.MECANICA CUANTICA. FORMULARE CONSISTENT PROBABILISTA, Spiridon Dumitru (Universitatea Transilvania Brasov), pret:32 lei

31.MECANICA MEDIILOR CONTINUE, Mircea Stan (Universitatea Politehnica Bucuresti), pret:41 lei

32.MECANICA PUNCTULUI MATERIAL SI A SOLIDULUI RIGID. TEORIA RELATIVITATII, Gabriela Cone,C. Negutu (Universitatea Politehnica Bucuresti), pret:72 lei

33.OPTICA, Boer Attila (Universitatea Transilvania Brasov), pret:44 lei

34.OPTICA ELECTROMAGNETICA. TEORIE SI APLICATII, Ecaterina Niculescu (Universitatea Politehnica Bucuresti), pret:55 lei

35.OSCILATII MECANICE UNDE ELASTICE SI ACUSTICE, Sebastian Popescu (Universitatea Al. I. Cuza Iasi), pret:55 lei

36.PROBLEME DE ELECTRICITATE SI MAGNETISM CU REZOLVARI, Gabriela Cone,Alina Gearba (Universitatea Politehnica Bucuresti), pret:58 lei

37.PROBLEME DE FIZICA, Ileana Creanga (Universitatea Politehnica Bucuresti), pret:60 lei

38.PROBLEME DE MECANICA CUANTICA - ED.II-A, Mihail Cristea,Adrian Radu,Ecaterina Cornelia Niculescu (Universitatea Politehnica Bucuresti), pret:58 lei

39.PROBLEME REZOLVATE DE FIZICA CLASICA, Ilie Ivanov (Universitatea Politehnica Bucuresti), pret:50 lei

40.SISTEME FOTOVOLTAICE, Laurentiu Fara,Eugenia Tulcan-Paulescu,Marius Paulescu (Universitatea Politehnica Bucuresti, Universitatea de Vest Timisoara), pret:39 lei

41.STIINTA MATERIALELOR METALICE. INDRUMAR DE LABORATOR, Constantin Dumitrache,Mihaela Barhalescu (Universitatea maritima Constanta), pret:43 lei

42.STRUCTURA SI EVOLUTIE - ED. 5 REVIZUITA SI ADAUGITA, Constantin Teodorescu, pret:83 lei

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI
FIZICĂ

Nota: Cartile la care este mentionat "pret de la:" pot fi achizitionate fie pe suport electronic, fie pe suport hirtie; celelalte carti pot fi achizitionate numai pe suport hirtie.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY